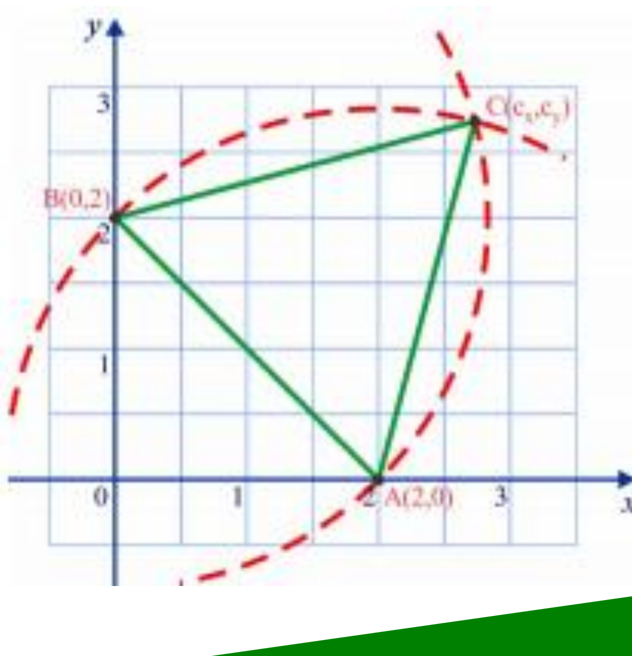
REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
DIRECÇÃO NACIONAL DE ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA

11ª Classe

O meu caderno de actividades



STOP SIDA

STOP COVID -19

FICHA TÉCNICA

Título:	O meu caderno de actividades de Matemática: 11ª Classe
Direcção:	Gina Guibunda & João Jeque
Coordenação Geral:	Manuel Biriate
Elaborador:	Anselmo Chuquela João Sapatinha & Cláudio Monjane
Concepção gráfica da capa:	Hélder Bayat, Bui Nguyet e Manuel Biriate
Layout:	Hélder Bayat
Impressão e acabamentos:	MINEDH
Revisão Científica:	Carlos Muchanga
Revisão Linguística:	Rui Manjate

PREFÁCIO

No âmbito da prevenção e mitigação do impacto da COVID-19, particularmente no processo de ensino-aprendizagem, o Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano concebeu um conjunto de medidas que incluem o ajuste do plano de estudos, os programas de ensino, bem como a elaboração de orientações pedagógicas a serem seguidas para a melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem.

Neste contexto, foi elaborado o presente Caderno de Actividades, tendo em consideração os diferentes conteúdos programáticos nas diferentes disciplinas leccionadas no Ensino Secundário. Nele é proposto um conjunto alargado de actividades variadas, destinadas a complementar as acções desenvolvidas na aula e também disponibilizar materiais opcionais ao desenvolvimento de competências pré-definidas nos programas.

A concepção deste Caderno de Actividades obedeceu à sequência e objectivos dos programas de ensino que privilegiam o lado prático com vista à resolução dos problemas do dia-a-dia e está estruturado em três (3) partes, a saber: I. Síntese dos conteúdos temáticos de cada unidade didáctica; II. Exercícios; III. Tópicos de correcção/resolução dos exercícios propostos.

Acreditamos que o presente Caderno de Actividades constitui um instrumento útil para o auto-estudo e aprimoramento dos conteúdos da disciplina ao longo do ano lectivo. O mesmo irá permitir desenvolver a formação cultural, o espírito crítico, a criatividade, a análise e síntese e, sobretudo, o desenvolvimento de habilidades para a vida.

As actividades propostas no Caderno só serão significativas se o caro estudante resolvê-las adequadamente, com a mediação imprescindível do professor.

"Por uma Educação Inclusiva, Patriótica e de Qualidade!"

CARMELITA RITA NAMASHULUA
MINISTRA DA EDUCAÇÃO E
DESENVOLVIMENTO HUMANO

Caro aluno!

O Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano **(**MINEDH) ciente da necessidade de complementar o material didáctico disponível, concebeu o presente caderno de exercícios da Disciplina de Matemática para garantir a continuidade da sua aprendizagem, tanto em ambiente escolar como em ambiente não escolar. Ao longo do caderno, irá encontrar os conteúdos de aprendizagem das unidades temáticas desta classe organizados da seguinte forma: Resumo dos conteúdos da unidade temática, exercícios resolvidos, exercícios propostos e no fim do caderno encontrara as soluções. Para melhor exercitação poderá para além dos exercícios constantes deste caderno, usar outras fontes tais como manuais, livros, Internet, etc.

Unidade I Teoria de conjuntos

Nota histórica

A teoria de conjuntos é uma parte da Matemática que desempenha um papel importante no nosso quotidiano, ela é aplicada em muitos campos da ciência, tais como: engenharia, economia, estatística, etc. O estudo moderno da teoria de conjuntos foi iniciado por **Georg Cantor** e **Richard Dedekind** em 1870.

1.1. Conjunto

Definição

Chama-se conjunto a uma colecção ou agrupamento de objectos, coisas, seres, classe, família, animais, pessoas, etc., que apresentam uma determinada característica.

Em geral, os objectos de um conjunto apresentam as mesmas características.

Exemplo:

- Conjunto dos números inteiros negativos;
- Conjunto das vogais do alfabeto português;
- Conjunto dos alunos de uma turma.

Elemento

- É cada objecto, ser ou pessoa que constitui um conjunto.

Exemplo:

- -3 é o elemento do conjunto dos números inteiro negativos;
- *a* é o elemento do conjunto das vogais;
- $\sqrt[3]{5}$ é o elemento do conjunto dos números irracionais;
- 3 é o elemento do conjunto solução da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$.

N.B.

Um dado conjunto está bem definido quando podemos estabelecer certamente se um elemento faz parte ou não do conjunto dado, isto é, os seus elementos apresentam todas as características do conjunto.

1.2. Relação de Pertença

Um elemento pode fazer parte ou não de um determinado conjunto. Para indicar que um elemento faz parte de um dado conjunto, utilizamos o símbolo $\in$ que se lê *pertence,* e, quando não faz parte, utilizamos o símbolo $\notin$ que se lê *não pertence*.

$x \in A$, lê-se *x* pertence a A

$x \notin B$, lê-se x não pertence a B

N.B. Os símbolos $\in$ e $\notin$ são usados apenas para relacionar um elemento com um conjunto.

Simbologia	Tradução
$5 \in IN$	O elemento 5 pertence ao conjunto dos números naturais.
$2{,}33 \notin IN$	O elemento 2,33 não pertence ao conjunto dos números naturais.

1.3. Formas de Definir um Conjunto

Por extensão

Quando se coloca todos os elementos do conjunto dentro de chavetas, separando-os por vírgulas.

Exemplo:

a) Conjunto dos números naturais positivos menores que dez.

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

b) Conjunto dos números ímpares menores que 99

$B = \{1,3,5,...,97\}$

c) Conjunto dos números inteiros não negativos.

$C = \{0,1,2,3,4,5,...\}$

Por Compreensão

Quando o conjunto está definido por meio de uma propriedade que caracteriza os seus elementos.

Exemplo:

a) Conjunto dos números naturais positivos menores que dez.

$A = \{x \in IN : x < 10\}$

b) Conjunto das vogais

$B = \{x : x\, é\, vogal\}$

1.4. Formas de Representação de um Conjunto

Em geral, os conjuntos podem ser representados por meio de chavetas, diagrama de Venn ou nas formas de intervalos e geométrica (recta graduada).

Representação por Chavetas

Exemplo:

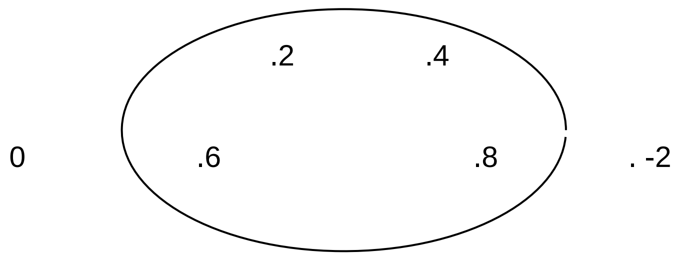
$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Representação por diagrama de Venn

Os elementos que pertencem ao conjunto são pontos internos ao recinto, delimitado por uma linha curva contínuo, enquanto os elementos que não pertencem ao conjunto são pontos externos ao recinto.

Exemplo:

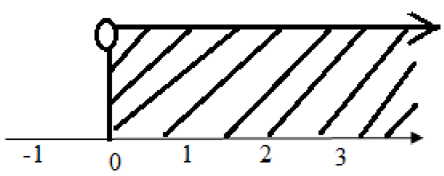
Conjunto dos números pares positivos menores que 10.



Representação sob forma de intervalos

Exemplo:

Conjunto dos números reais positivos.



$]0;\ +\infty[$

1.5. Tipos de Conjuntos

Conjunto Vazio

Chama-se conjunto vazio, e representa-se por ϕ *ou* $\{\ \}$, a qualquer conjunto que não possui nenhum elemento.

Exemplo: $V = \{x \in IN : x < 0\}$

Conjunto Singular

Chama-se conjunto singular ou unitário ao conjunto constituído por um e só um elemento.

Exemplos:

$D = \{-2\}$.

$B = \{x \in IN : x^2 - 25 = 0\}$

N.B.

O símbolo { } ou $\varnothing$ representa o conjunto vazio. O conjunto $\{\varnothing\}$ é um conjunto singular e não vazio.

Exemplo: Um saco vazio dentro doutro saco vazio.

1.5.1. Conjunto Universal ou Universo

Chama-se conjunto Universo ou universal, e representa-se por U, ao conjunto constituído por todos os elementos com os quais estamos a trabalhar.

Exemplo:

Para os conjuntos $A=\{x \in IR : x > 2\}$ e $B=\{x \in IR : x \leq 2\}$, o conjunto universal é IR.

Se tratamos de elementos que são números inteiros negativos ou positivos, o conjunto universal é o conjunto dos números inteiros relativos Z.

Se tratarmos dos alunos da 8ª, 9ª, 10ª, 11ª e 12ª classes, o conjunto universal são alunos do ensino secundário.

1.5.2. Cardinal de um Conjunto

Chama-se cardinal de um conjunto, e representa-se por #, ao número de elementos desse conjunto.

Exemplo:

$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, # A = 9

$B=\{x : x\, é\, vogal\}$, # B = 5

$D=\{\ \}$, # D = 0

1.5.3. Conjunto Finito

Chama-se conjunto finito aquele conjunto cujos elementos é possível enumerá-los todos (determinar o seu cardinal).

Exemplo:

$F=\{x \in IN : 2 < x < 10\}$

1.5.4. Conjunto Infinito

Chama-se conjunto infinito ao conjunto cujo número total de elementos não é possível determinar.

Exemplo:

$A=\{x \in IR : x > 2\}$

Todos os conjuntos IN, Z, Q e IR.

Qualquer conjunto representado na forma de intervalo em R, como: $x \in [0;2]$.

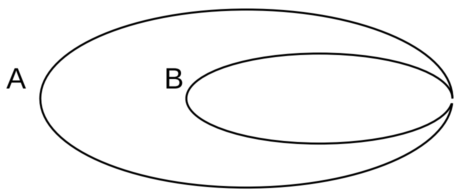
1.6. Relação de Inclusão

A relação de inclusão indica se um determinado conjunto está contido ou não em um outro conjunto.

Se todos os elementos de um conjunto pertencem a outro, então o primeiro conjunto está contido no segundo. Basta um único elemento do primeiro conjunto não pertencer ao segundo para que o primeiro conjunto não esteja contido no segundo.

Simbologia	**Tradução**
$A \subset B$	O conjunto A está contido no conjunto B
$A \not\subset B$	O conjunto A não está contido no conjunto B
$A \supset B$	O conjunto A contém o conjunto B

No diagrama de Venn



Nota: Os símbolos $\subset ; \supset e \not\subset$ são usados apenas para relacionar conjuntos entre eles.

1.7. Igualdade de Conjuntos

Dois ou mais conjuntos são iguais quando apresentam os mesmos elementos, em qualquer ordem, sendo que elementos iguais, em um mesmo conjunto, serão considerados uma única vez. Daí, podemos afirmar que é verdadeira a igualdade dada por:

A= {a; b; c} = {c; b; a}

Simbolicamente a igualdade entre conjuntos fica definida como: $\boldsymbol{A = B \Leftrightarrow A \subset B}$ **e** $\boldsymbol{B \subset A}$

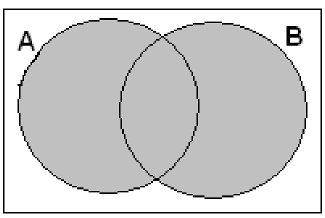
1.8. Operações sobre os conjuntos

1.8.1. Reunião ou união

A união de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A **ou** a B. Indicaremos a união pelo símbolo ∪.

Simbolicamente: $\boldsymbol{A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}}$

No Diagrama de Venn

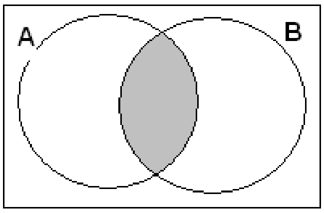


1.8.2. Intersecção de conjuntos:

A intersecção de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B. Indicaremos a intersecção pelo símbolo ∩.

Simbolicamente: $\boldsymbol{A \cap B = \{x : x \in A \ e \ x \in B\}}$

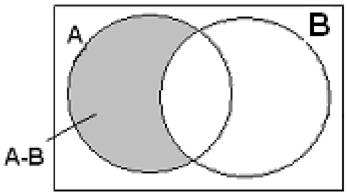
No diagrama de Venn



1.8.3. Diferença de conjuntos:

A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Matematicamente: $A - B$

Simbolicamente: $A - B = \{x : x \in A \ e \ x \notin B\}$

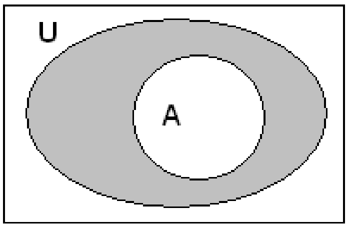


1.8.4. Conjunto complementar

Dados os conjuntos A e U, se o conjunto A está contido no conjunto U, a diferença U – A é chamada **complementar** de A em relação a U. O conjunto U é o conjunto universo.

Simbolicamente: $\mathbf{\bar{A} = \{x : x \in U \ e \ x \notin A\}}$

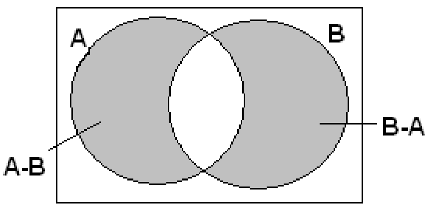
No Diagrama de Venn



1.8.5. Diferença Simétrica

A diferença simétrica entre os conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, ou os elementos que pertencem a B e não pertencem a A. Indicaremos a diferença simétrica entre A e B por $A\Delta B$.

Simbolicamente:$A\Delta B = \{x : x \in A \ e \ x \notin B \ ou \ x \in B \ e \ x \notin A\}$



1.8.6. Propriedades Sobre as Operações com Conjuntos

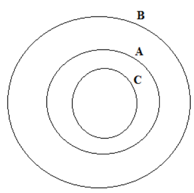
PROPRIEDADES DA REUNIÃO DE CONJUNTOS	**PROPRIEDADES DA INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS**
1. **Comutativa**: Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se: $A \cup B = B \cup A$	1. **Comutativa**: Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, tem-se: $A \cap B = B \cap A$
2. **Associativa:** Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C tem-se: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	2. **Associativa:** Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C tem-se: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. **Conjunto vazio:** Elemento neutro na reunião: AU∅=A	3. **Conjunto Universal:** Elemento neutro na intersecção: *U*∩A=A
4. **Conjunto Universal:** Elemento absorvente na reunião: *U*UA=*U*	4. **Elemento absorvente na Intersecção:** A∩∅=∅
5. **Distributividade da Reunião em relação à Intersecção:** Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, tem-se: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	5. **Distributividade da Intersecção em relação à Reunião:** Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, tem-se: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.9. Exercícios propostos

1. No diagrama seguinte A, B e C são três conjuntos não vazios. Assinala com **V** as afirmações verdadeiras e com **F** as falsas, em cada um dos seguintes casos:

$a) A \subset B$ $\quad b)\ C \subset B$ $\quad c)\ B \subset A$ $\quad d)\ A \subset C$

$e)\ B \not\subset A$ $\quad f)\ A \not\subset C$ $\quad g)\ B \supset A$ $\quad h)\ A \not\supset B$



2. Dado o conjunto $A = \{0; 1; 2;\ \{5\}\}$, diz se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) $0 \in A$ ____	c) $2 \subset A$ ____	e) $\{2; 5\} \subset A$ ______	g) $\emptyset \subset A$ ______
b) $\{5\} \in A$ _____	d) $\{5\} \subset A$ _____	f) $\emptyset \in A$ ______	h) $5 \in A$ ______

3. Dados os conjuntos abaixo, defina-os por extensão:

a) $F = \{x \in IN \,/\, x \leq 9\}$ b) $G = \{x \in Z \,/\, x > 2, x \text{ é } impar\}$ c) $J = \{x \in IN \,/\, 3 < x < 5\}$	d) $H = \{x \in IN \,/\, x > 3, x \text{ é } par\}$ e) $I = \{x \in IN \,/\, x > 1\}$ f) $M = \{x \in Z^{+} : x \leq 0\}$

4. Faz o diagrama dos conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {2, 3, 4, 5, 6}:

5. Com base nos conjuntos do exercício anterior, determina por extensão:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$

6. Com base nos conjuntos $A = \{1, 2, 3\}, B = \{5, 6, 7\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, preenche os espaço em branco com os símbolos adequados, de modo a obter proposições verdadeiras:

a) 3 ___ A b) 7 ___ C c) A ___ B d) B ___ C e) C ___ A f) A ___ C

7. Dados os seguintes conjuntos A e B, determina $A \cup B$.

a) A=$\{1,4,5,6\}$ e B= $\{1,5,8,9\}$

b) A= $\{a, b, c, d\}$ e B= $\{a, c, e\}$

c) A= $\{x: x \text{ é } número\ natural\}$ e B= $\{x: x \text{ é } número\ impar\}$

8. Sendo $A = \{0; 1; 2; 3\}$ e $B = \{0; 2; 3; 5\}$ e C= $\{x/x \text{ é } par\ menor\ que\ 10\}$ e D=$\{x/x \text{ é } ímpar\ compreendido\ entre\ 4\ e\ 10\}$. Determina:

a) A∪B
b) A∪C
c) A∪D
d) $B \cup C$
e) $B \cup D$
f) $C \cup D$
g) (A∪B)∪ C
h) (A∪C)∪ D
i) (B∪C)∪ D

9. Dados os conjuntos $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 4\}$ e $C = \{1; 2; 4\}$, determina o conjunto M tal que: $A \cup M = \{1; 2; 3\}$ $B \cup M = \{3; 4\}$ $C \cup M = A \cup B$

10. Dados $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, A = $\{1,2,3,4\}$ e B= $\{3,4,5,6\}$, Determina:

a) A∩B
b) $\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}$
e) $\bar{B}$
f) $\bar{A} \cap \bar{B}$

c) $A \cap U$

d) $\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}$

g) $\bar{A} \cup \bar{B}$

h) $\bar{A}$

11. Sejam dados os conjuntos $U = \{1; 2,3,4; \ldots; 9\}$, $A = \{1; 2: 3; 4\}$ $B = \{2; 4; 6; 8\}$ e

$C = \{3; 4; 5; 6;\}$ Determina:

$a)\overline{A}$ $b)\ \overline{B}$ $c)\ \overline{A \cap C}$ $d)\ \overline{A \cup B}$ $e)\overline{\overline{A}}$ $f)\ \overline{B - C}$

12. Sejam $U = \{a; b; c; d; e\}$, $A = \{a; b; d\}$ e $B = \{b; d; e\}$, identifica:

$a) A \cup B$ $b)\ B \cap A$ $c)\ \overline{B}$ $d)\ B - A$ $e)\ \overline{A} \cap B$

$f)\ A \cup \overline{B}$ $g)\ \overline{A} \cap \overline{B}$ $h) \overline{B} - \overline{A}$ $i)\ \left(\overline{A \cap B}\right)$

13. Aplicando as propriedades das operações com conjuntos, determina:

$a) U \cap A$ $b)\ \overline{\varnothing}$ $c)\ \overline{A} \cap A$ $d)\ U \cup A$ $e)\ A \cap A$

$f)\ A \cup A$ $g)\ \varnothing \cup A$ $h)\ \overline{U}$ $i)\ \overline{A} \cup A$ $j)\ \varnothing \cap A$

14. Dados os conjuntos. $U =]-2; 4], A =]2; 4[\ e\ B = [-1; 3[$, determina:

$a)\ \overline{A}$ $b) \overline{B}$ $c)\ A \cup B$ $d)\ A \cap B$ $e)\ \overline{A \cap B}$ $f)\ \overline{A} \cup \overline{B}$ $g)\ \overline{\overline{A}}$

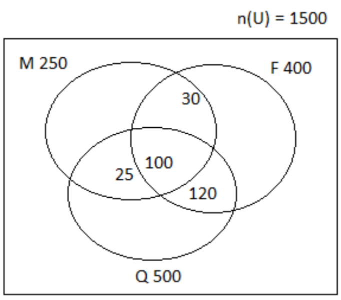
15. Numa escola, 30 professores leccionam no período de manhã, 25 professores leccionam à tarde e 5 leccionam nos 2 turnos.

a) Representa os dados num diagrama de Venn.

b) Quantos professores leccionam em um só período?

c) Quantos professores têm a escola?

16. Na figura ao lado, U é o conjunto dos 1500 alunos de uma escola e os números representam o número de elementos de cada conjunto.



F – Conjunto dos alunos que estudam Física

M – Conjunto de alunos que estudam matemática

Q – Conjunto dos alunos que estudam Química

Indica quantos alunos estudam:

a) Só Matemática.

b) Matemática e Química.

c) Física ou Matemática.

d) Matemática, Física e Química.

e) Determina o número de alunos que não estuda nenhuma das disciplinas.

17. Um exame que tinha 2 questões A e B foi executado por 60 candidatos. Houve 40 candidatos que responderam correctamente à questão A, 36 que responderam correctamente à questão B e 6 que não conseguiram responder correctamente à questão A e B.

a) Quantos candidatos não responderam correctamente à questão A?

b) Quantos candidatos não responderam correctamente à questão B?

c) Quantos candidatos responderam correctamente às questões A e B (ambas)?

d) Quantos candidatos conseguiram APENAS responder a uma questão?

18. Em uma academia, 200 alunos praticam Voleibol, 250 Andebol, 60 fazem as duas modalidades e 90 não fazem nem natação, nem musculação.

a) Quantos alunos fazem somente voleibol?

b) Quantos alunos não praticam andebol?

c) Quantos alunos têm a academia?

19. A tabela mostra as preferências dos alunos de uma escola em relação às disciplinas de Matemática e Física.

Disciplinas	Matemática	Física	Matemática e Física
Nº de alunos	120	200	80

a) Representa os dados em um diagrama de Venn.

b) Determina o número total de alunos desta escola.

Unidade Temática II Lógica Matemática

Nota histórica

A palavra "lógica" deriva da palavra grega *lógiké*, relacionado com **logos, razão, palavra** ou **discurso** que significa a **ciência do raciocínio**. A **lógica matemática** é o ramo da ciência que se dedica ao estudo do **raciocínio matemático**.

O estudo da lógica permite com maior rigor a interpretação da linguagem corrente e nos raciocínios matemáticos.

2.1. Conceitos de Designação e Proposição

2.1.1 Designações são expressões que representam os seres.

Exemplos:

- Célia
- Maputo
- 3+2
- Mdc(2;4)
- $2x + 3$
- $\sqrt{4}$
- 10

2.1.2 Proposições

Proposições são expressões que se podem atribuir o valor lógico (Verdadeiro ou Falso).

Exemplos:

- Maputo é capital de Moçambique. **(Verdade)**
- $2 + 5 \times 3 = 16$ **(Falsidade)**
- Mdc(2;4)=2 **(Verdade)**
- $5 < 3$ **(Falsidade)**

Existem expressões que não podem ser consideradas proposições.

Exemplos:

a) 20 é um número grande.
b) Amanhã irá chover!
c) Ela é a melhor cantora do mundo.
d) $x + 5 = 7$
e) $2 + 3x > 5$

2.2. Princípios lógicos sobre proposições

Princípios de não contradição: Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Princípio do terceiro excluído: Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo uma terceira possibilidade.

2.3. Universo dos valores lógicos

O valor lógico de uma proposição verdadeira é representado pela letra maiúscula **V** ou pelo número **1** e de uma proposição falsa pela letra maiúscula **F** ou pelo número **0**.

Assim, o universo dos valores lógicos é o conjunto $\{V;\ F\}$ ou $\{1; 0\}$.

2.4. Exercícios propostos

I. Das expressões seguintes, distinga as designações das proposições:

a) $\sqrt{4}+\sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{8}$ e) $\{2, 3, 5\}$ g) mdc$(8, 16)$

b) $\sqrt{4}+\sqrt{16}=6$ d) $\sqrt[3]{8}>2$ f) $1 \notin \{2, 3, 5\}$ h) mdc$(8, 16) = 8$

a) 6 + 24 j) 6 + 24 =30 c)$\sqrt{7}$ $k)\ \sqrt{7}\ \geq 7$ $l)\ \{1,2,3\}$ $m)\ 4 \in\ \{1,2,3\}$

$n)\ 2<5$ $o)\ 3+2 \leq 5$ p) $mmc(3,7)=21$ q) $2x+1=4$

II. Atribua o valor lógico a cada uma das proposições do exercício anterior.

2.5. Operações com proposições

2.5.1. Negação ($\sim ou\ \neg$)

A operação de negação consiste em converter uma proposição falsa em uma verdadeira ou uma verdadeira em uma falsa.

O símbolo $\sim ou\ \neg$ lê-se "não"ou "não é verdade que…".

Para negar uma proposição, basta colocar o símbolo de negação antes dela.

Exemplo:

1. Escreva a negação de uma das proposições e indica o valor lógico da proposição e da negação:

a) $\boldsymbol{p}: Maputo$ é capital de Moçambique.

b) $\boldsymbol{q}: 2+3\times 4=20$

c) $\boldsymbol{r}: 6>2$

Resolução:

a) $\boldsymbol{p}$: $Maputo$ é capital de Moçambique. (**proposição verdadeira)**

$\sim \boldsymbol{p}$: **Não é verdade que** $Maputo$ é capital de Moçambique.

$ou\ simplesmente,$

$\sim \boldsymbol{p}$: $Maputo$ **não** é capital de Moçambique. (**proposição falsa)**

b) $\boldsymbol{q}: 2 + 3 \times 4 = 20$ (**proposição falsa)**

$\sim \boldsymbol{q}$: **Não é verdade que** $2 + 3 \times 4 = 20$.

$ou\ simplesmente$

$\sim \boldsymbol{q}$: $2 + 3 \times 4 \neq 20$. (**proposição verdadeira)**

c) $\boldsymbol{r}: \mathbf{6} > 2$ (**proposição verdadeira)**

$\sim \boldsymbol{r}$: **Não é verdade que** $\mathbf{6} > 2$.

$ou\ simplesmente$

$\sim \boldsymbol{r}$: $\mathbf{6 \leq 2}$. (**proposição falsa)**

Para determinar o valor lógico da negação de uma proposição a partir do seu valor lógico, pode-se utilizar qualquer das seguintes tabelas, que se chamam **tabelas de verdade.**

p	$\sim p$
V	F
F	V

Ou

p	$\sim p$
1	0
0	1

Exercícios:

1. Escreve a negação de uma das proposições e indica o valor lógico da proposição e da negação:

a) $2^3 = 6$ c) $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$ e) $4 \notin \mathbb{N}$

c) $2\sqrt{3} \geq \sqrt{12}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} < \sqrt[6]{5}$ f) $\pi \leq 3{,}2$

2. Seja dada a proposição p: 4+8 < 13.

a) Qual é o valor lógico de p?
b) Escreva a negação de p.
c) Indica o valor lógico de $\sim p$.

2.5.2. Conjunção (∧, lê-se "e")

Chama-se **conjunção** à operação lógica que associa duas proposições a uma nova proposição que é verdadeira quando ambas as proposições dadas são simultaneamente verdadeiras, e é falsa nos outros casos.

Tabelas de verdade

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ou

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemplos:

3. Considera as proposições:

$\boldsymbol{p}: O\ Manuel\ veste\ calças\ verdes.$

$\boldsymbol{q}: O\ Manuel\ veste\ camisa\ verde.$

Traduze em linguagem corrente a proposição $p \wedge q$.

Resolução:

$$p \wedge q: \underbrace{O\ Manuel\ veste\ calças\ verdes}_{p}\ e\ \underbrace{o\ Manuel\ veste\ camisa\ verde}_{q}.$$

Ou simplesmente

$$p \wedge q: O\ Manuel\ veste\ calças\ e\ camisa\ verdes.$$

4. Indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:

a) $2 + 1 = 3 \wedge 5 + 1 > 5$

b) $2^3 = 6 \wedge 3 > 1$

Resolução:

a) $\underbrace{2 + 1 = 3}_{V} \wedge \underbrace{5 + 1 > 5}_{V}$ **(V)**

b) $\underbrace{2^3 = 6}_{F} \wedge \underbrace{3 > 1}_{V}$ **(F)**

2.5.3. <u>Disjunção inclusiva</u> (∨, lê-se "ou")

Chama-se **disjunção inclusiva** à operação lógica que associa duas proposições a uma nova proposição que é falsa quando ambas as proposições dadas são simultaneamente falsas, e é verdadeira nos outros casos.

Tabelas de verdade

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemplos:

1. Considere as proposições:

$\boldsymbol{a}: Vou\ comprar\ uma\ camisa.$

$\boldsymbol{b}: Vou\ comprar\ um\ livro.$

Traduze em linguagem corrente a proposição $a \vee b$.

<u>Resolução:</u>

$a \vee b: \underbrace{Vou\ comprar\ uma\ camisa}_{a}\ ou\ \underbrace{vou\ comprar\ um\ livro}_{b}.$

Ou simplesmente

$a \vee b: Vou\ comprar\ uma\ camisa\ ou\ um\ livro.$

2. Indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:
   a) $5 < 4 \vee 4^3 = 12$
   b) $3^2 = 6 \vee 3 > 1$

<u>Resolução:</u>

a) $\underbrace{5 < 4}_{F} \vee \underbrace{4^3 = 12}_{F}$ **(F)**

b) $\underbrace{3^2 = 6}_{F} \vee \underbrace{3 > 1}_{V}$ **(V)**

2.5.4. <u>Disjunção exclusiva</u> ($\dot{\vee}$, lê-se "Ou…ou…")

Chama-se disjunção exclusiva à operação lógica que associa duas proposições a uma nova proposição que é verdadeira quando ambas as proposições dadas têm valores lógicos distintos, e é falsa nos outros casos.

Tabelas de verdade

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ou

p	q	$p \dot{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemplos:

1. Considera as proposições:

$\boldsymbol{a}: Compro\ sapatos.$

$\boldsymbol{b}: Compro\ chinelos.$

Traduze em linguagem corrente a proposição $a \dot{\vee} b$.

<u>Resolução:</u>

$a \dot{\vee} b: Ou\ \underbrace{Compro\ sapatos}_{a}\ ou\ \underbrace{compro\ chinelos}_{b}.$

1. Indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:
   1. $1 + 1 = 3 \dot{\vee} 2 > 1$
   2. $3 + 1 = 4 \dot{\vee} 2 + 3 = 5$

<u>Resolução:</u>

a) $\underbrace{1 + 1 = 3}_{F} \dot{\vee} \underbrace{2 > 1}_{V}$ **(V)**

b) $\underbrace{3 + 1 = 4}_{V} \dot{\vee} \underbrace{2 + 3 = 5}_{V}$ **(F)**

2.5.5. Implicação ($\Longrightarrow$)

Consideremos as proposições seguintes:

$\boldsymbol{p}$: 2 é um número par.

q: 3 é um número ímpar.

A proposição $\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$ lê-se **"$\boldsymbol{p\ implica\ q}$"** ou **"$\boldsymbol{Se\ p, ent\tilde{a}o\ q}$".**

$$\boldsymbol{p \Longrightarrow q}: Se\ \underbrace{2\ \text{é}\ um\ número\ par}_{p}, então\ \underbrace{3\ \text{é}\ um\ número\ ímpar}_{q}.$$

$\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$ ← **Consequente (condição necessária para p)**

↑

Antecedente (condição suficiente para q)

<u>Definição</u>:

Chama-se <u>implicação</u> à operação lógica que associa duas proposições a uma nova proposição que é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

Tabelas de verdade

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ou

p	q	$p \Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemplo:

Indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:

a) $2 > 1 \Longrightarrow 10 > 11$
b) $2 < 1 \Longrightarrow 11 > 10$

c) $\sqrt{4} = 3 \Longrightarrow 3 > 4$

Resolução:

a) $\underbrace{2 > 1}_{V} \Longrightarrow \underbrace{11 < 10}_{F}$ **(F)**

b) $\underbrace{2 < 1}_{F} \Longrightarrow \underbrace{11 > 10}_{V}$ **(V)**

c) $\underbrace{\sqrt{4} = 3}_{F} \Longrightarrow \underbrace{3 > 4}_{F}$ **(V)**

2.5.6. Equivalência ($\Leftrightarrow$)

Chama-se **equivalência ou dupla implicação** à operação lógica que associa duas proposições a uma nova proposição que é verdadeira quando as proposições dadas têm o mesmo valor lógico.

A proposição $p \Leftrightarrow q$ lê-se "$\boldsymbol{p}$ é $\boldsymbol{equivalente\ a\ q}$" ou "$\boldsymbol{p\ se\ e\ s\acute{o}\ se\ q}$" ou ainda "$\boldsymbol{p\ se\ e\ somente\ se\ q}$".

$\boldsymbol{p}$ $\acute{e}\ a\ condição\ necessária\ e\ suficiente\ para$ $\boldsymbol{q}$.

Tabelas de verdade

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ou

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemplos:

1. Considera as proposições:

$\mathbf{r}$: $Vou\ ao\ cinema.$

$\mathbf{s}$: $Arranjo\ o\ bilhete.$

Traduze em linguagem corrente a proposição $r \Leftrightarrow s$.

Resolução:

$r \Leftrightarrow s$: $\underbrace{Vou\ ao\ cinema}_{r}\ se\ e\ só\ se\ \underbrace{arranjo\ o\ bilhete}_{s}.$

2. Indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:

a) $2 + 3 \times 5 = 25 \Leftrightarrow 3 \times 5 = 15$

b) $4 + (2 + 3) \neq 9 \Leftrightarrow 6 < 2 + 3$

<u>Resolução</u>:

a) $\underbrace{2 + 3 \times 5 = 25}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{3 \times 5 = 15}_{V} \qquad (\boldsymbol{F})$

b) $\underbrace{4 + (2 + 3) \neq 9}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{6 < 2 + 3}_{F} \qquad (\boldsymbol{V})$

<u>Exercícios propostos:</u>

1. Considera as seguintes proposições:

p: Este livro é meu

q: Aquela pasta é tua

Traduze em linguagem corrente as proposições:

$a) \sim p$

$b) \sim q$

c) $p \vee q$

d) $\sim p \wedge q$

e) $\sim p \dot{\vee} \sim q$

2. Considera as proposições:

$\boldsymbol{a}$: O Paulo é estudante

b: O Paulo é programador

$\boldsymbol{c}$: O João é estudante

3. Traduze em linguagem simbólica:

A: O Paulo é estudante ou programador

B: Nem Paulo nem João são estudantes

C: Ou Paulo é programador ou João não é estudante

4. Sejam p, q e r as proposições:

p: 2 é um número par. **q:** 2 é um número primo. **r:** 2 é divisor de 4.

Traduze em linguagem corrente o significado das seguintes expressões:

a) $\sim p$ e) p ∨ q

b) p ∧r f) $p \dot{\vee} q$

c) $\sim r$ ∧p g) $\sim (p \wedge q)$

d) $\sim (q$ ∧ r) h) $(p \wedge\sim q) \rightarrow q$

5. Indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:

$\boldsymbol{a}$**:** $2+1=3 \ \wedge \ 5+1>5$

$\boldsymbol{b}$**:** $2^2=9 \wedge 3>1$

$\boldsymbol{c}$**:** $1+3=4 \ \ \wedge \ \sqrt{16} \ < \ 3+2$

d: $2>5 \ \vee \ 2^2=9$

e: $13-3=10 \vee 2>5$

f: $2^3=9 \vee 3>1$

g: $1 \subset \{1,2\} \vee \sqrt{16+9}=7$

h: $3+1=4 \dot{\vee} 2+3=5$

i: $1+1=3 \dot{\vee} 2>1$

j: $1+2\times 4=9 \dot{\vee} 3\neq 4$

6. Considera as proposições:

p: Chove

q: O sol brilha

r: Faz calor

Traduze simbolicamente as proposições seguintes:

a) Se o sol brilha, então faz calor.

b) Se chove, então não faz calor.

c) Se não faz calor, então o sol não brilha.

d) Se não chove e o sol brilha, então faz calor.

7. Indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:

a) $2>1 \Longrightarrow 10>11$

b) $2<1 \Longrightarrow 11>10$

c) $\sqrt{4}=2 \Longrightarrow 3>4$

8. Sabendo que a proposição $p \Rightarrow q$ é falsa, diz qual é o valor lógico de cada uma das proposições:

a) $\sim p \vee q$ b) $p \wedge q$ c) $p \dot{\vee} q$

9. Considerando as proposições:

a: $2 + 2 = 5$

b: π é um número irracional

c: $\sqrt{3}$ é um número irracional

Traduze em linguagem corrente e indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:

a) $a \Rightarrow\sim b$ b) $\sim a \Rightarrow c$ c) $(b \wedge c) \Rightarrow\sim a$ d) $(a \vee\sim c) \Rightarrow\sim b$

10. Considera as proposições:

p: Paulo estuda Matemática

q: Paulo quer ser cientista

r: Paulo quer ser jornalista

Traduze em linguagem corrente:

a) $p \Leftrightarrow q$

b) $p \Leftrightarrow\sim r$

c) $(p \wedge q) \Leftrightarrow\sim r$

11. Indica o valor lógico de cada uma das proposições seguintes:

a) $2 + 3 \times 5 = 16 \Leftrightarrow 3 \times 5 = 15$

b) $4 + (2 + 3) = 10 \Leftrightarrow 2 + 3 = 6$

c) $2 \geq 1 \Leftrightarrow 10 \leq 11$

12. Sendo:

$\boldsymbol{p}$: 12 é um número par

$\boldsymbol{q}$: $\frac{1}{3}$ é um número racional

$\boldsymbol{r}$: $\sqrt{2}$ é um número irracional

Traduze em linguagem simbólica e indica o valor de cada uma das proposições seguintes:

a) 12 é um número par se e só se $\frac{1}{3}$ é um número racional.

b) 12 é um número par se e só se $\sqrt{2}$ não é um número irracional.

c) 12 é um número par e $\sqrt{2}$ não é um número irracional se e só se $\frac{1}{3}$ é um número racional.

13. Sabendo que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira, diz qual é o valor lógico das proposições:

a) $p \vee \sim q$ b) $(p \wedge q)\ \dot{\vee} \sim p$ c) $(p \vee q) \Rightarrow p$

14. Se $a \vee \sim b$ é falsa, qual é o valor lógico de:

b) $a \vee b$

c) $\sim a \wedge \sim b$

d) $\sim a \Rightarrow b$

e) $\sim a \Leftrightarrow \sim b$

f) $(a \wedge b)\ \dot{\vee} \sim a$

2.6. Propriedades da negação

Considera a proposição:

$\boldsymbol{p}$: *O João é um estudante*.

$\sim\boldsymbol{p}$: $O\ João\ \boldsymbol{não}$ é $um\ estudante$.

$\sim\sim\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{Não}$ é $\boldsymbol{verdade\ que}\ o\ João\ não$ é $um\ estudante$.

A dupla $negação\ corresponde$ à $afirmação$

$\sim\sim\boldsymbol{p}$: *O João é um estudante.*

Ou simplesmente

$$\boxed{\sim\sim\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}}$$

Demonstração:

$\boldsymbol{p}$	$\sim\boldsymbol{p}$	$\sim\sim\boldsymbol{p}$
V	F	V
F	V	F

$p = \sim\sim p$

2.7. Propriedades da conjunção e da disjunção

Sejam p, q e r quaisquer proposições.

As operações lógicas da conjunção e da disjunção gozam das seguintes propriedades:

Propriedade	Conjunção	Disjunção
Comutativa	$p \wedge q = q \wedge p$	$p \vee q = q \vee p$
Associativa	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
Elemento neutro	$p \wedge V$=p; V é elemento neutro da conjunção	$p \vee F$=p; F é elemento neutro da disjunção
Elemento absorvente	$p \wedge F$=p; F é elemento absorvente da conjunção	$p \vee V$=p; V é elemento absorvente da disjunção
Idempotência	$p \wedge p = p$	$p \vee p = p$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1. Utilize as tabelas de verdade para mostrar que:

a) $p \vee q = q \vee p$

b) $p \wedge q = q \wedge p$

c) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

d) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

e) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge p \vee r)$

f) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

2. Construir as Tabelas de Verdade das seguintes proposições:

a) $\sim(p \vee \sim q)$ d) $\sim p \wedge \sim (q \to p)$

b) $\sim(p \to \sim q)$ e) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \to q$

c) $p \wedge (q \wedge \sim p)$ f) $(p \vee q) \to (q \to p)$

3. Utiliza tabelas de verdade para mostrar que, para quaisquer valores lógicos de p, se tem sempre:

a) $p \wedge \sim p = F$ b) $p \vee \sim p =$V c) $p \dot{\vee} \sim p = V$

4. Prova, utilizando directamente as propriedades das operações lógicas, que se tem sempre:

a) $a \wedge (\sim a \wedge b) = F$ c) $a \wedge (b \vee \sim a) = a \wedge b$

b) $a \vee (\sim a \vee b) = V$ d) $a \vee (b \wedge \sim a) = a \vee b$

2.8. Primeiras leis de Morgan

Negar que duas proposições são simultaneamente verdadeiras é o mesmo que afirmar que pelo menos uma é falsa.

$$\boldsymbol{\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q}$$

Negar que pelo menos uma das proposições é verdadeira, é o mesmo que afirmar que ambas são simultaneamente falsas.

$$\boldsymbol{\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q}$$

2.8.1. Propriedades da implicação

Relação da implicação e a disjunção

$$\boldsymbol{p \Rightarrow q = \sim p \vee q}$$

Negação da implicação

$$\sim(p \Rightarrow q) = \sim(\sim p \vee q) = \sim\sim p \wedge \sim q = p \wedge \sim q$$

Propriedades da equivalência

$$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$$

Negação da equivalência

$$\sim (p \Leftrightarrow q) = \sim [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] = \sim (p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

Resumo:

Negação	$\sim\sim p = p$
1.$^{\underline{as}}$ Leis de Morgan	$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

	$\sim (p \vee q) =\sim p \wedge\sim q$
Conjunção	$p \wedge\sim p = F$
Disjunção	$p \vee\sim p = V$
Implicação	$\sim(p \Longrightarrow q) = p \wedge\sim q$
Equivalência	$\sim (p \Leftrightarrow q) = (p \wedge\sim q) \vee (q \wedge\sim p)$

Exemplo:

Escreve, na forma mais simples, a negação das proposições seguintes:

$a)\ a \wedge\sim b$ b) $(a \wedge\sim b) \vee\sim a$ c) $\sim a \Longrightarrow b$ d) $(a \wedge\sim b) \Longrightarrow a$

Resolução:

$\sim (a \wedge\sim b) =\sim a \vee\sim\sim b =\sim a \vee b$

$\sim [(a \wedge\sim b) \vee\sim a] =\sim [(\boldsymbol{a} \vee\sim \boldsymbol{a}) \wedge (\sim \boldsymbol{b} \vee\sim \boldsymbol{a})] =\sim [\boldsymbol{V} \wedge (\sim \boldsymbol{a} \vee\sim \boldsymbol{b})] =\sim (\sim \boldsymbol{a} \vee\sim \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$

$\sim(\sim a \Longrightarrow b) =\sim (\sim\sim a \vee b) =\sim (a \vee b) =\sim a \wedge\sim b$

$\sim [(a \wedge\sim b) \Longrightarrow a] =\sim [\sim (\boldsymbol{a} \wedge\sim \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{a}] =\sim [(\sim \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{a}] =\sim [(\sim \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{a}) \vee \boldsymbol{b}] =\sim (\boldsymbol{V} \vee \boldsymbol{b}) =\sim \boldsymbol{V}$
$= \boldsymbol{F}$

2.9. Exercícios propostos 02:

1. Escreve a negação das proposições:

   a) $3 > 2 \wedge 4 \leq -2$ b) $1 < 2 \leq 3$

2. Simplifica as seguintes expressões:

   a) $a \vee (\sim a \vee b)$ e) $a \wedge (\sim a \vee b)$ h) $(a \Longrightarrow\sim b) \Longrightarrow b$

   $(\sim a \vee b) \wedge (a \Longrightarrow\sim b)$ i) $\sim [(a \Longrightarrow b) \wedge\sim b] \wedge\sim a$

c) p ∧ (~p ∧ q) f) $\sim[\sim(p \rightarrow q) \wedge\sim q]$

d) $\{(p\ \wedge q) \vee [(\sim p\ \vee\ \sim q) \wedge\ q]\}$ ^ p g) $\sim (\sim p) \wedge\sim (\sim q \vee p)$

3. Considera verdadeira a seguinte proposição:

M: $\sim p \wedge (q \rightarrow \sim r)$.

a) Sabendo que r tem valor lógico V, qual é o valor lógico de p?
b) Determina a negação de M.

4. Sejam a, b, c três proposições:

$\boldsymbol{a}$: O Manuel estuda Física

$\boldsymbol{b}$: O Manuel estuda Matemática

$\boldsymbol{c}$: O Manuel estuda Biologia

6. Traduze em linguagem corrente a negação de $a \vee b$.

7. Admitindo falsa a proposição $(a \Longrightarrow \sim b) \vee (a \wedge c)$, quais são as disciplinas estudadas pelo Manuel.

Unidade Temática III ÁLGEBRA

Nota histórica

Em matemática, **álgebra** é o ramo que estuda a manipulação formal de equações, operações matemáticas, polinómios e estruturas algébricas.

As origens da álgebra encontram-se na antiga Babilónia, cujos matemáticos desenvolveram um sistema aritmético avançado, com o qual puderam fazer cálculos algébricos. Com esse sistema, eles foram capazes de aplicar fórmulas e calcular soluções para incógnitas numa classe de problemas que, hoje, seriam resolvidos como equações lineares, equações quadráticas e equações do grau superior, etc.

3. Expressões algébricas (Definição, Classificação e domínio de existência)

3.1. Expressões algébricas

Observa as seguintes expressões:

- $2x^2 - x + \dfrac{3}{2x}$
- $x + \sqrt{x-1}$
- $2xy + x - 5$

Expressões como estas designam-se por **expressões algébricas.**

Definição: Uma expressão diz-se **algébrica** quando as variáveis (podendo ser uma) estão sujeitas às operações de **adição, subtracção, multiplicação, divisão** ou **extracção da raiz.**

3.2. Classificação de expressões algébricas

Uma expressão algébrica pode ser: **Expressão algébrica** $\begin{cases} racional \begin{cases} Inteira \\ fraccionária \end{cases} \\ Irracional \end{cases}$

3.2.1. Expressão algébrica racional

Uma expressão diz-se **algébrica racional** quando a variável não figura sob sinal do radical.

Exemplos:

a) $x^2 - 2x + 3$ b) $\frac{\sqrt{3}x}{x-2} + x^2$ c) $\frac{1}{x^2}$ d) $x^3 - \frac{1}{2}x + 2x^2$ e) $\frac{2x-1}{x^2+1}$ f) $\frac{10}{7} - \sqrt{2}x$

Uma expressão diz-se **algébrica racional inteira** quando a variável não aparece no divisor e nem figura sob sinal do radical.

Exemplos: **Alíneas** a), d) e f).

Domínio de existência

O domínio de existência de uma expressão algébrica racional inteira é todo o **conjunto dos números reais** (IR).

Uma expressão diz-se **algébrica racional fraccionária** quando a variável aparece no divisor, mas não figura sob sinal do radical.

Exemplos: Alíneas b), c) e e).

Domínio de existência

O domínio de existência de uma expressão algébrica racional fraccionária é todo o **conjunto dos números reais** que não anulam o denominador.

Exemplos:

a) $\frac{1}{x+1}$ Domínio de existência: $\boldsymbol{x}\in$R $\wedge$ $\boldsymbol{x+1\neq 0}$

D.E: $\boldsymbol{x}\in$R\ $\{\boldsymbol{-1}\}$

b) $\frac{3x+1}{x^3 - x^2}$ Domínio de existência: $x \in R \wedge x^3 - x^2 \neq 0$

$$x^2(x-1) \neq 0$$

$$x^2 \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0$$

$$\boldsymbol{x \neq 0 \wedge x \neq 1}$$

$$D.E: x \in R \setminus \{0,1\}$$

c) $\frac{3}{x^2-9}$ Domínio de existência: $\boldsymbol{x} \in R \ \wedge \ x^2 - 9 \neq 0$

$$x^2 \neq 9$$

$$x \neq \pm\sqrt{9}$$

$$x \neq \pm 3$$

$$\boldsymbol{D.E}: x \in R \setminus \{-3,3\}$$

d) $\frac{3}{x^2+x-2}$ Domínio de existência: $x \in R \ \wedge \ x^2 + x - 2 \neq 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 1 + 8$$

$$\Delta = 9$$

$$x_1 = 1 \ \wedge x_2 = -2$$

$$\boldsymbol{D.E}: x \in R \setminus \{-2,1\}$$

3.2.1. Expressão algébrica irracional

Uma expressão diz-se **algébrica irracional** quando a variável figura sob sinal do radical ou apresenta expoente fraccionário.

Exemplos: a) $\sqrt{x}$ b) $\frac{2+3x}{1+\sqrt{x}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - x^2$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-2x}}$ f) $x^2 - x^{\frac{2}{3}} + 5 = 0$

Domínio de existência de expressões irracionais

- Se $\boldsymbol{n}$ é par, **D.E:** $P(x)$≥0

Exemplos:

e) $\sqrt{2x-4}$ Domínio de existência: $2x - 4 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 2; x \in \ [2; \ +\infty[$

g) $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ Domínio de existência: $x + 1 > 0 \leftrightarrow x > -1; x \in \ ]-1; +\infty[$

4. Polinómios – Definição

Chama-se polinómio a toda a função definida pela relação:

$\boldsymbol{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$, onde

$a_n;\ a_{n-1};\ a_{n-2};\ a_2; a_1;\ a_0$ são coeficientes e pertencem ao conjunto dos números reais;

$n \in \mathbb{N}$; x é a variável.

Nota:

- Se $a_n \neq 0$ o expente máximo n define o grau do polinómio e indica-se por $\boldsymbol{gr(P) = n.}$
- Se P(x) = 0 não se define o grau do polinómio;
- Não são polinómios as relações do tipo:

  i. $P(x) = \sqrt{x} - 2x + 1$

  ii. $P(x) = x^3 + \frac{2}{x}$

4.1. Polinómios Idênticos

Dois polinómios P(x) e Q(x) são idênticos se e só se os coeficientes dos termos do mesmo grau forem iguais.

Exemplo: Dados os polinómios: *P (x) = (3b – a)x² – 2 x e Q(x) = 2x² + (3b- 2a)x* .Determina os valores de $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, para que *P (x)* e *Q (x),* sejam idênticos.

Resolução:

Se P (x) = Q (x) então:

$(3b - a)x^2 - 2\,x = 2x^2 + (3b - 2a)x$ Onde:

$$\begin{cases} 3b - a = 2 \\ 3b - 2a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 + 3b \\ 3b - 2(-2 + 3b) = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 3b + 4 - 6b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -3b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 + 3.2 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$$

4.1. Operações com polinómios

4.1.1 Adição de polinómios

Considera os polinómios P e Q definidos por: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$. Definimos a soma de P e Q por:

$$P(x) + Q(x) = (a_{n+}b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 + b_0)$$

Exemplo:

Seja dado os polinómios $A(x) = 2x^2 + 3x - 5\ \ e\ \ B(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$ Calcula:

$A(x) + B(x)$.

$$A(x) + B(x) = (2x^2 + 3x - 5) + (\frac{x^2}{2} - x + 3)$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2}\right)x^2 + (3 - 1)x + (-5 + 3)$$

$$= \frac{5}{2}x^2 + 2x - 2$$

4.1.2. Subtracção de polinómios

Considera os polinómios P e Q definidos por: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$. Definimos a subtracção de P e Q por:

$$P(x) - Q(x) = (a_{n-}b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - b_0)$$

Exemplo:

Seja dado os polinómios $A(x) = 2x^2 + 3x - 5$ e $B(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3$, calcula:

$A(x) - B(x)$.

$$A(x) - B(x) = (2x^2 + 3x - 5) - (\frac{x^2}{2} - x + 3)$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + [3 - (-1)]x + (-5 - 3)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 4x - 8$$

4.1.3. Multiplicação de Polinómios

Na multiplicação de dois polinómios, devemos multiplicar cada termo de um polinómio por todos os termos do outro e reduzir os termos semelhantes.

Exemplos:

- $(2x + 3)(x + 1) = 2x.x + 2x.1 + 3.2x + 3.1 = 2x^2 + 2x + 6x + 3 = 2x^2 + 8x + 3;$
- $(x^2 - 1).(x^2 - 2x + 1) = x^2.(x^2 - 2x + 1) - 1.(x^2 - 2x + 1) =$
  $= x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + 2x - 1 = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

4.1.3.1. Identidades notáveis da Multiplicação de Polinómios

Para desenvolver um produto de binómios, podemos utilizar as seguintes identidades notáveis:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$
- $(a-b).(a^2 + a.b + b^2) = a^3 - b^3$
- $(a+b).(a^2 - a.b + b^2) = a^3 + b^3$

Essas igualdades podem ajudar-nos a fazer a decomposição dos polinómios.

4.1.4. Divisão de polinómios

Dado dois polinómios P(x) e D(x), efectuar a divisão de P(x) por D(x) é determinar dois polinómios Q(x) e R(x) que satisfazem as seguintes condições:

1ª $P(x) = \mathrm{D(x).Q(x) + R(x)}$

2ª $gr(R) < gr(D)$ ou $R(x) = 0$

Exemplo:

Dado os polinómios $P(x) = 2x^4 + x - 3x^3 - 1$ e $D(x) = x^2 - 2x + 3$, determina o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ de $P(x)$ por $D(x)$.

1.º Escrevemos os dois polinómios em ordem decrescente de grau.	$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 1$ $D(x) = x^2 - 2x + 3$
2.º Completamos o dividendo, caso falte algum termo de grau intermediário, através do coeficiente zero.	$2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 1$
3.º Utilizando o algoritmo da divisão numérica, dividimos o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de D(x).	$2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 1 \;\; \lvert \;\; x^2 - 2x + 3$ $2x^2$ $\left[\left(\frac{2x^4}{x^2}\right) = 2x^2\right]$
4.º Multiplicamos o quociente obtido por D(x) e subtraímos o resultado de P(x), encontrando o 1º resto parcial.	$2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 1 \;\; \lvert \;\; x^2 - 2x + 3$ $-2x^4 + 4x^3 - 6x^2 \;\; \lvert \;\; 2x^2$ $\underbrace{x^3 - 6x^2 + x - 1}_{1^\circ \text{ resto parcial}}$ $\left[\left(\frac{2x^4}{x^2}\right) = 2x^2\right]$

5.º Dividimos o 1.º termo do 1.º resto parcial pelo 1.º termo de D(x). Multiplicamos o quociente obtido por D(x) e subtraímos do 1.º resto parcial, obtendo o 2.º resto parcial.	$$\begin{array}{l\|l} 2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \hline -2x^4 + 4x^3 - 6x^2 & \underbrace{2x^2 + x - 4}_{\text{quociente}} \\ \hline \quad x^3 - 6x^2 + x - 1 & \\ \quad -x^3 + 2x^2 - 3x & \\ \hline \qquad \underbrace{-4x^2 - 2x - 1}_{\text{2º resto parcial}} & \left[\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = x\right] \end{array}$$
6.º Repetimos esse procedimento até que o grau do resto seja menor que o grau do divisor.	$$\begin{array}{l\|l} 2x^4 - 3x^3 + 0x^2 + x - 1 & x^2 - 2x + 3 \\ \hline -2x^4 + 4x^3 - 6x^2 & \underbrace{2x^2 + x - 4}_{\text{quociente}} \\ \hline \quad x^3 - 6x^2 + x - 1 & \\ \quad -x^3 + 2x^2 - 3x & \\ \hline \qquad -4x^2 - 2x - 1 & \left[\left(\frac{-4x^2}{x^2}\right) = -4\right] \\ \qquad +4x^2 - 8x + 12 & \\ \hline \qquad\quad \underbrace{-10x + 11}_{\text{resto}} & \end{array}$$ Logo: $Q(x) = 2x^2 + x - 4$ e $R(x) = -10x + 11$

Nota: Um polinómio $P(x)$ é divisível por $D(x)$ se o resto da divisão é igual a zero.

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinómio $P(x)$ pelo binómio do tipo $\boldsymbol{x - \alpha}$ é igual a $P(\alpha)$.

$$\boldsymbol{R = P(\alpha)}$$

Teorema de D'Alembert

Se α é raiz do polinómio $P(x)$, então $P(\alpha)$ é igual a zero, isto é, $P(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

$$\boldsymbol{P(\alpha) = R = 0}$$

Exemplo:

Determina o valor de $\boldsymbol{m}$, de modo que o polinómio $P(x) = 3x^2 - \boldsymbol{m}x + 1$ seja divisível por $x - 1$.

Resolução:

Se $P(x)$ é divisível por $x - 1$, então $P(1) = 0$

$P(1) = 0$

$3.1^2 - m.1 + 1 = 0$

$3 - m + 1 = 0$

$m = 4$

5. Equações

5.1. Equações com Radicais

Equações do tipo $\sqrt{A} = B$

Este tipo de equações resolve-se elevando ambos membros da equação a dois, isto é:

$$\sqrt{A} = B \implies A = B^2 \; com \; A \geq 0$$

Exemplo:

Resolve a seguinte equação irracional: $\sqrt{x^2 - 1} = -x + 2$

Resolução:

$$\sqrt{x^2 - 1} = -x + 2 \implies x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 \implies 4x - 5 = 0 \implies x = \frac{5}{4}$$

Domínio de existência da expressão irracional de índice par: $x^2 - 1 \geq 0$

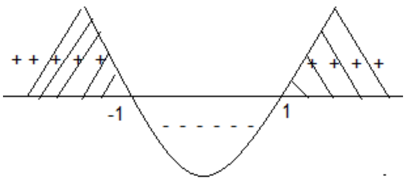
Resolvendo esta inequação pelo método gráfico, teremos que:

1.º Achar os zeros da: $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

2.º Esboçar o gráfico



3.º Solucionar a inequação: $X \in \,]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

Como $\frac{5}{4}$ faz parte do domínio, então a solução da equação é: **sol:** $\boldsymbol{x = \frac{5}{4}}$

5.2. Equações do tipo $\sqrt{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{B}}$

Para resolver equação deste tipo $\sqrt{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{B}}$, considera-se: $A = B$ com $A \geq 0$ e $B \geq 0$

Exemplo:

Resolve a seguinte equação irracional: $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{x - 2}$

Resolução:

$$\sqrt{-x + 4} = \sqrt{x - 1} \implies \left(\sqrt{-x + 4}\right)^2 = \left(\sqrt{x - 1}\right)^2 \iff -x + 4 = x - 1 \iff x = \frac{5}{2}$$

Domínio:

$$-x+4 \geq 0 \ \wedge x-1 \geq 0 \ \Leftrightarrow x \leq 4 \ \wedge x \ \geq \ 1$$

Como $\frac{5}{2}$ faz parte do domínio, então a solução da equação é: **sol:** $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

6. Sistemas de equações lineares a 3 incógnitas

6.1. Resolução de sistemas aplicando a regra de Cramer

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ x + 3y + 2y = 13 \end{cases}$$

- Dado o sistema ao lado, vamos resolver aplicando o método de Cramer:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Primeiro calculamos a determinante dos coeficientes da matriz.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

- Para isso, escrevemos os elementos das duas primeiras colunas ao lado da determinante.

$$D = 4 - 1 + 12 - 2 + 3 - 8 = 8$$

- De seguida, multiplica-se os elementos das diagonais principais e somamos os resultados.

$$M_x = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & 1 & 1 \\ \mathbf{5} & 2 & -1 \\ \mathbf{13} & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Para determinar o determinante de $\boldsymbol{x}$, toma-se o determinante principais e substituem-se os coeficientes de $\boldsymbol{x}$ pelos termos independentes e depois procede-se da mesma maneira como se fez com o determinante principal.

$$M_x = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & 1 & 1 \\ \mathbf{5} & 2 & -1 \\ \mathbf{13} & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \\ 13 & 3 \end{matrix}$$

$$D_x = 6.2.2 + 1.(-1).13 + 1.5.3 - 1.2.13 - 6.(-1).3 - 1.5.2$$

$$D_x = 8$$

$$M_y = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 13 & 2 & 1 & 13 \end{array}\right]$$

$$D_y = 1.5.2 + 6.(-1).1 + 1.4.13 - 1.5.1 - 1.(-1).13 - 6.4.2$$

$$D_y = 16$$

$$M_z = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$D_z = 1.2.13 + 1.5.1 + 6.4.3 - 6.2.1 - 1.5.3 - 1.4.13$$

$$D_z = 24$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{16}{8} = 2$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{24}{8} = 3$$

Portanto, x = 1; y = 2 e z = 3.

3. Exercícios Propostos

1. Classifica as seguintes expressões algébricas:

a) $\frac{2x^2-1}{2}$ b) $4x^3-5x+2$ c) $\frac{3x^2-4x+1}{x^2-2x+2}$ d) $\frac{x^4-4x^2+7}{\sqrt{5}}$ e) $x^2-x-5)(2x-x^3)$

f) $\sqrt{x^2-x+1}$ g) $\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4}}$ h) $\frac{\sqrt{x+1}}{x^3}$ i) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+2x+1}}$ j) $\frac{\sqrt[5]{x-1}}{x}$ l) $2x^3-x\sqrt{2}-5$

m) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$ n) $\frac{\sqrt{x-y}+\sqrt[4]{x+y}}{x+y}$

2. Identifica o domínio de existência e o valor de expressão seguinte:

a) $\frac{2x^2+\frac{1}{2}y^2}{x^2-y^2}$ com $x=-1$ e $y=6$ b) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{a+b}$ com $a=4$ e $b=0$

3. Identifica o domínio de existência das seguintes expressões:

a) $\sqrt{x-3}$ b) $\frac{2}{3x+6}-x$ c) $\sqrt{2-x}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ d) $\frac{4-x}{\sqrt[3]{1-2x}}$ e) $x\sqrt{2}-1$

f) $\frac{x^4-x-6}{\sqrt{5}}$ g) $\sqrt[5]{x^5+1}$ h) $\frac{x}{\sqrt[4]{2x+1}}+\sqrt{x^2+4}$ i) $\frac{x}{x-x^2+12}$

4. São idênticas ou não as seguintes expressões algébricas? Justifica.

a) $\sqrt{x^2}$ e x em IR b) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}$ e x – 3 em IR

c) $\sqrt{x^4+2x^2+1}$ e em IR d) $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1}$ e em IR

5. Indica os polinómios de entre as seguintes expressões algébricas:

a) $-x^3+4x-1$ b) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2-4x^3+x^5$ c) $\sqrt{x-1}$ d) $\frac{-4x+x^4-6x^2+3}{5}$

e) $\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{3}$ f) $\frac{3}{x^3-x+1}$ g) $x^2\sqrt{2}-x^3\sqrt{3}+x-1$ h) $\frac{x^3-x^5+x^7}{\sqrt{5}}$ i) $\sqrt[5]{x^5+x+1}$

6. Determina os números reais **a** e **b,** para que sejam idênticos os seguintes polinómios em x:

a) $(a-2)x^2+(4+b)x+1$ e $(2a-5)x^2+(2b+3)x+1$

b) $a-2+x+(5a-b)x^2+x^3$ e $x^3+(a+b)x^2+x+a-b$

c) $2x^3+(a-b)x^2-x+a+b$ e $2-(2a-b)x+(a+b)x^3$

7. Reduze os termos semelhantes nos seguintes polinómios e escreve nos polinómios resultantes os termos por ordem decrescente dos expoentes de x.

a) $x^3-2x+7x^{3-}x^2-x+5$

b) $x^5-\frac{1}{2}x^2+2x-x^4\sqrt{3}-x^2+2x^4\sqrt{3}+6$

c) $ax^2+\sqrt{(a-b)^3}\cdot x^4-5bx+bx^2+b\sqrt{a-b}\cdot x^4+2bx+ab$

8. Sejam dados os polinómios:

$A(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}x;$ $B(\boldsymbol{x})=x^{5-}4x^3-2x^2-x+1$ $C(\boldsymbol{x})=x+2;$ $D(\boldsymbol{x})=x^3-\frac{1}{2}x^2-2.$

Calcula:

a) $B(\boldsymbol{x})+D(\boldsymbol{x})$ b) $2A(\boldsymbol{x})+4C(\boldsymbol{x})$ g) $A(\boldsymbol{x})-C(\boldsymbol{x})+B(\boldsymbol{x})$

d) $B(\boldsymbol{x})-A(\boldsymbol{x})\cdot D(\boldsymbol{x})$ e) $[A(\boldsymbol{x})]^2+[C(\boldsymbol{x})]^2$ f) $A(\boldsymbol{x})\cdot B(\boldsymbol{x})\cdot C(\boldsymbol{x})$

9. Determina o quociente e o resto da divisão de:

a) x^3-4x^2-x+3 por x^2-x+1

b) $5-x-2x^2-x^3$ por $x-2$

c) $2x^4-x^2-1$ por x^2-2x

d) x^3-4x^2+x+6 por x^2+5x+6

10. Usando a regra de Gorner-Ruffini, determina o quociente e o resto da divisão de:

a) $2x^2 - 3x - 2$ por $x + 2$

b) $3x^3 - x^2 + 1$ por $x - 2$

c) $3 - x - x^2 - 7x^4 + 8x^5$ por $x - 1$

d) $2x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ por $2x - 3$

11. Verifica quais dos números seguintes são raízes do polinómio $P(x) = x^3 - 7x + 6$

a) 1 b)4 c) -1 d) -2 e) -3

12. Decompõe em factores:

a) O polinómio $4x^3 - x^2 - 8x + 2$ que admite a raiz $1/4$.

b) O polinómio $x^4 + 2x^2 - 3$ que admite as raízes 1 e -1.

13. Determina as raízes inteiras dos seguintes polinómios e decompõe-nos em factores:

a)$x^2 - 6x + 5$ b)$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ c)$x^3 + x^2 - 4x - 4$

d)$x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ e)$x^3 + x^2 - x + 2$

14. Verifica se é divisível o polinómio:

a) $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ por $x + 1$

b) $x^4 - 4x^3 + x^2 - 7x + 12$ por $x - 4$

c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $x^2 - 5x + 6$

15. Determina os coeficientes do polinómio

a) $ax^2 + bx - 2$ sabendo que ele admite as raízes 1 e -2

b) $x^3 + bx + cx + d$ Sabendo que ele é divisivel por $x + 1$ e $x^2 - 4$

c) $2x^2 + bx + 2$ sabendo que o resto da divisão de $2x^2 + bx + 2$ por $x - 1$ é igual à -1.

16. Determina o polinómio do 4.º grau que admite as raízes $-1; 0; 1$, sabendo que ele toma o valor 24 tanto para $x = 2$ como para $x = -2$

17. Determina $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ de modo que:

a) $P_{(x)} = mx^3 + nx^2 - 5x + 2$ seja divisível $x^2 - x - 2$

b) $Q_{(x)} = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + mx + n$ seja divisível por $x^2 - 1$

c) $E_{(x)} = my^3 + 3y^2 + n$ seja divisível por $y^2 - 1$

18. Usando as identidades notáveis, calcula:

a) 31^2 b) 49^2 c) 106^2 d) 298^2 e) 22^2 f) $28 \cdot 32$ g) $1{,}2^2$ h) $0{,}8^2$

19. Efectua, aplicando as identidades notáveis:

a) $(a+2b)^3$ b) $(2t-1)^3$ c) $8-t^3$ d) a^6-b^6

20. Simplifica mostrando em cada caso o domínio de existência e de equivalência:

a) $\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x^3-x}$ b) $\frac{(x-\sqrt{5})(x+3)}{x^2-5}$ c) $\frac{2t^2-32}{t^2+t-20}$

d) $\frac{x^3+6x^2+12+8}{x^2+4x+4}$ e) $\frac{x^4-2x^2+1}{x+1}$

21. Racionaliza o denominador das seguintes fracções:

a) $\frac{2x}{\sqrt{x}}$ em R b) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2y}}$ $em\ R\backslash\{0\}$

c) $\frac{3x}{\sqrt[3]{27xy^4}}$ $em\ R\backslash\{0\}$ d) $\frac{3}{2+3\sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ f) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$ $em\ R_0^+$

g) $\frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}-1}$ $em\ R^+$\ ]0,1[

22. Sem resolver as equações, verifica se:

a) O número -4 é solução de $x^2 - 3x = 0$;

b) O número 3 é solução de $(x^2 - 4) : (x - 2) = 2x - 1$;

c) O número 4 é solução de $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}=4$;

d) O número 3 é solução de $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x-1.}$

23. Determina p, sabendo que -2 é solução da equação $x^2 + 2px - p + 6 = 0$.

24. São equivalentes ou não os pares de equações seguintes:

a) $\frac{2x^2-1}{x^2+1}=1\ e\ 2x^2-1=x^2+1$; b) $\frac{2x-3}{x-1}=\frac{4x-5}{x-1}\quad e\quad 2x-3=4x-5$

c) $\sqrt{x-4}=\sqrt{2-x}\ e\ x-4=2-x$; d) $(x-1)^2=1\ e\ x-1=1$;

e) $x^2 = 7x$ e $x = 7$; f) $(x + 1)(x - 2) = 3(x - 2)$ e $x + 1 = 3$?

25. Sem aplicar a fórmula resolvente, resolve:

a) $-3x^2 = 0$ b) $2x^2 - 12 = 0$ c) $2x^2 - 18 = 0$ d) $4a^2 x^2 - b^2 = 0$

e) $2x^2 + 16x = 0$ f) $7x - 5x^2 = 0$

26. Resolve as seguintes equações em R:

a) $3x^3 - 24 = 0$ b) $2x^3 + 54 = 0$ c) $25x^3 + 1 = 0$ d) $27x^3 = -8$ e) $4x^3 + 3x^2 = 0$

f) $5x^2 - x^3 = 0$ g) $x^3 = 3x$ h) $8x^2 - x^3 - 16x = 0$ i) $x^3 + 8x = 0$

j) $9x^3 + 9x^2 - x - 1 = 0$

27. Resolve as seguintes equações irracionais:

a) $\sqrt{2x+1} + 2 = 5$ b) $2\sqrt{3-x} - 3 = 0$ c) $\sqrt{4-x^2} - 2 = 0$ d) $\sqrt[3]{x^2 - x + 6} = 0$

e) $2 - \sqrt{x - x^2 + 4} = 0$ f) $\sqrt{3 - x^2} + 5 = 0$ g) $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = 0$

h) $3\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x} = 0$ i) $\sqrt{2-x} - 2 \cdot \sqrt{x+3} = 0$ j) $\sqrt{x^2 + x - 2} - 3x + 4 = 0$

28. Resolva os seguintes sistemas pelo método de adição ordenada:

a) $\begin{cases} -5x + 2y - 9 = 0 \\ -x + 3y + 7 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x-3) + y = 2 \\ 4x = 6 + 3y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 3x - 2y + 12 = 0 \end{cases}$

29. Determina o valor de ***k*** tal que o sistema $\begin{cases} x - ky = 2 \\ 2x + y = -8k \end{cases}$ seja indeterminado.

30. Determina o valor de ***m*** para que tenha solução única o seguinte sistema $\begin{cases} mx - 2y = m \\ 2x - my = 2 \end{cases}$.

Ache essa solução.

31. Determina os valores de **a** e **b** tal que o seguinte sistema seja impossível:

a) $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ 3x + 6y = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - ay + 1 = 0 \\ 6x + by + 2 = 0 \end{cases}$

32. Resolve os seguintes sistemas aplicando a regra de Cramer:

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = \frac{z}{3} - 3 \\ x + y = \frac{z}{3} \\ 3x = \frac{y}{2} + 2z \end{cases}$

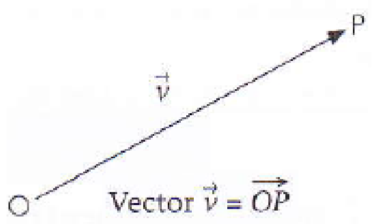
Nota histórica

A **Geometria Analítica** é a área da Matemática que se baseia nos estudos da Geometria por meio da utilização da Álgebra. Os estudos iniciais estão ligados ao matemático francês **René Descartes** no século XVII, onde criou princípios matemáticos capazes de analisar por meio de métodos geométricos as propriedades do ponto, da recta e da circunferência, determinar distâncias entre eles e sua localização.

4.1. Vector – Definição

Vector é um elemento geométrico que fica definido pela sua magnitude (ou comprimento ou módulo ou valor absoluto) direcção e sentido.

Um vector representa-se com uma letra minúscula com seta por cima da letra, em alguns casos, os vectores são representados pelas letras que definem as suas extremidades; por exemplo $\overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do vector, e P a extremidade.

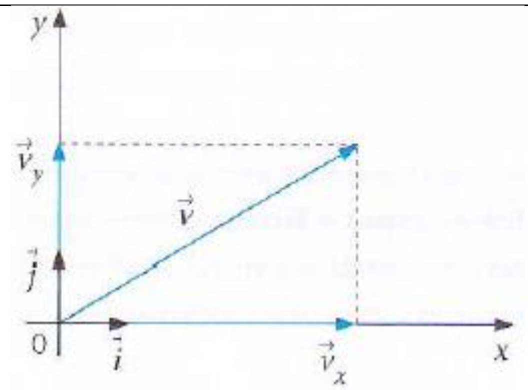


4.1. 1 Vector unitário

Vector unitário é aquele que o seu comprimento é igual a unidade. $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}. \vec{v}$ é o vector unitário na direcção $\vec{v}$.

4.1.2. Coordenadas de um vector

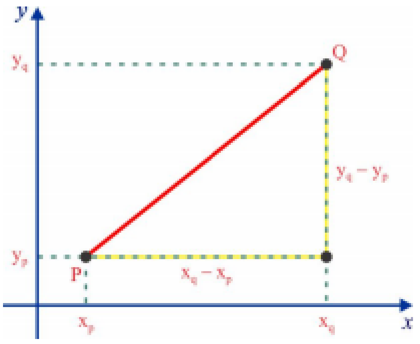
Um vector fica completamente definido, conhecendo as suas coordenadas.

O vector $\vec{v}$ é igual à soma dos vectores formados pelas suas projecções em cada eixo, como mostra a figura ao lado. $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ Os escalares v_x e v_y são as coordenadas do vector no sistema. Os vectores $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ são os vectores unitários.	

4.2. Distância entre dois pontos

Dados dois pontos $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$ no plano cartesiano, a distância entre eles é definida por:

$$\boxed{d_{PQ} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}}$$



4.3. Equação vectorial da recta no plano

Dadas as coordenadas de um ponto $\boldsymbol{A(x_1, y_1)}$ e de um vector $\boldsymbol{\vec{v} = (a, b)}$.

$$\boxed{\boldsymbol{(x, y) = (x_1, y_1) + t(a, b)}}$$

se $\boldsymbol{P(x, y), A(x_1, y_1)\ e\ \vec{v} = (a, b)}$

4.4. Equação geral da recta

A equação geral da recta é dada pela expressão. $\boxed{\boldsymbol{Ax + By + C = 0}}$

4.4.1. Equação reduzida da recta no plano:

A equação reduzida da recta é: $\boxed{\boldsymbol{y = mx + b}}$ em que ***x*** e ***y*** são, respectivamente, a variável independente e a variável dependente; ***m*** é o coeficiente angular, e ***n*** é o coeficiente linear. Além disso, ***m*** e ***n*** são números reais.

4.4.2. Declive de uma recta:

Dada a equação geral da recta $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, convertendo a equação geral na equação reduzida:

$Ax + By + C = 0 \leftrightarrow By = -Ax - C \leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, B \neq 0$ portanto

$m = -\frac{A}{B}$**.** Ao valor de "**m**" chama-se declive.

4.4.3. Cálculo de declive de uma recta dados dois pontos da recta

Considera os pontos $A(x_1;\ y_1)$ e $B(x_2;\ y_2)$. O declive pode ser encontrado pela expressão:

$$\boxed{\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}}$$

4.4.4. Condição de paralelismo e de perpendicularidade de duas rectas em função dos seus respectivos declives

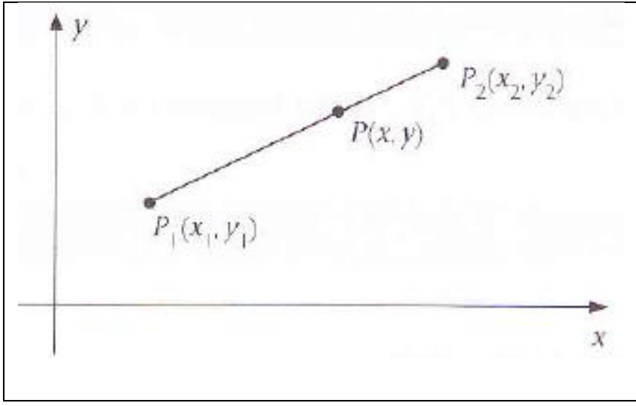
Considera as equações de duas rectas $r\!: y = m_1x + b$ e $s\!: y = m_2x + b$

- Se $r//s$ então $\boxed{m_1 = m_2}$

- Se $r \perp s$ então $\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$

4.4.5. Fórmula para determinar o ponto médio de um segmento e suas aplicações

Considera o segmento de recta P_1P_2 possui um ponto médio P com as seguintes coordenadas $P(x, y)$.

	As coordenadas do ponto P são dadas por $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, portanto então teremos: $\boxed{P(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})}$

4.5. Determinação de pontos de intersecção de duas rectas

Considera as rectas **r**: $3x + 2y - 7 = 0$ e s: $x - 2y - 9 = 0$. Determina o ponto de intersecção das duas rectas.

$r: 3x + 2y - 7 = 0$ $\quad$ $s: x - 2y - 9 = 0$

$r: 3x + 2y - 7 = 0 \leftrightarrow y = \frac{7-3x}{2}$ $\quad$ $s: x - 2y - 9 = 0 \leftrightarrow y = \frac{x-9}{2}$

$$y = y$$

$\frac{7-3x}{2} = \frac{x-9}{2} \leftrightarrow 3x + x = 7 + 9 \leftrightarrow 4x = 16 \leftrightarrow x = \frac{16}{4} \leftrightarrow x = 4$

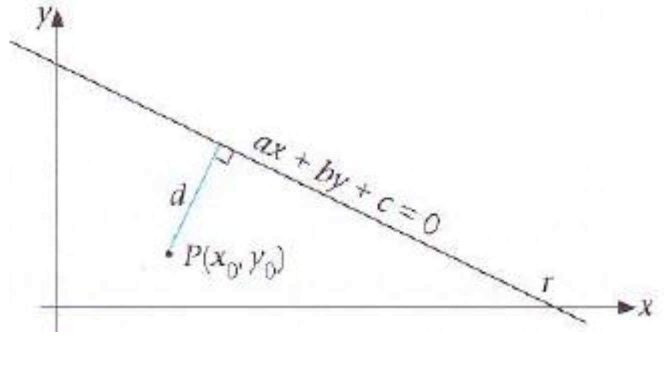
$$\begin{cases} y = \frac{7-3x}{2} \leftrightarrow y = \frac{7-3.4}{2} = -\frac{5}{2} \\ y = \frac{x-9}{2} \leftrightarrow y = \frac{4-9}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

As coordenadas do ponto P de intersecção das rectas r e s é $(4; -\frac{5}{2})$

4.6. Cálculo da distância de um ponto a uma recta

Dado um ponto $P(x_o, y_o)$ e uma recta $r: ax + by + c = 0$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



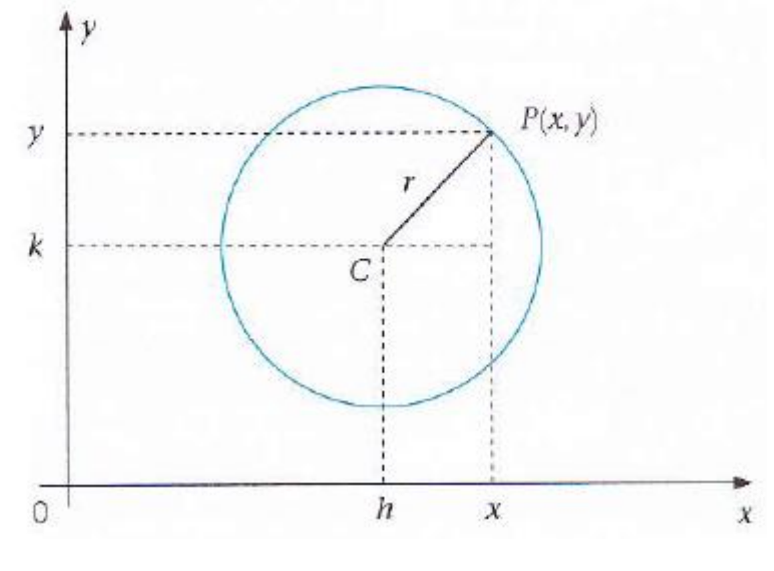
4.7. Equação da circunferência de centro e raio dados

Se (h, k) é o centro e r é o raio, então:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Quando o centro da circunferência coincide com a origem do sistema de coordenadas, a equação transforma-se em:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



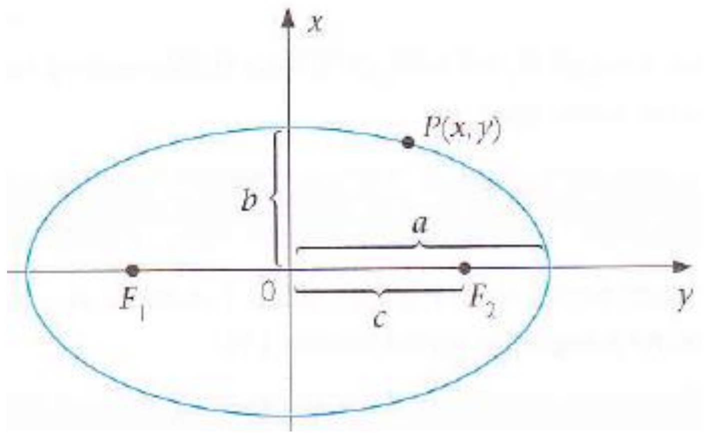
4.8. Equação da elipse e equação da hipérbole

Se (h, k) é o centro da elipse, então:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

Quando o centro da elipse coincide com a origem do sistema de coordenadas, a equação transforma-se em:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2}$$



4.10. Exercícios resolvidos

1. Calcula a distância entre $A(-1,3)$ e $B(4,-2)$

Sabendo que $(x_p, y_p) = (-1,3)$ e $(x_q, y_q) = (4,-2)$, teremos :

$d = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$

$d = \sqrt{(4-(-1))^2 + (-2-3)^2}$

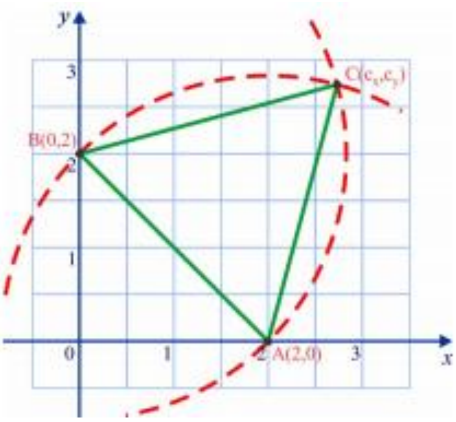
$d = \sqrt{5^2 + (-5)^2}$

$d = \sqrt{50}$

$d = 5\sqrt{2}$

2. Considera os pontos A(2,0) e B(0,2), determina o ponto $C(x_c, x_c)$, do primeiro quadrante, tal que o triângulo $[ABC]$ seja equilátero.

Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, então $d^2{}_{AB} = d^2{}_{BC} = d^2{}_{AC}$



$$(0-2)^2 + (2-0)^2 = (x_c - 0)^2 + (y_c - 2)^2$$
$$= (x_c - 2)^2 + (y_c - 0)^2$$

Montando as equações$d^2{}_{AB} = d^2{}_{BC}$ e $d^2{}_{AB} = d^2{}_{AC}$

$$\begin{cases}(x_c-2)^2 + y_c^2 = 2^2 + 2^2 \\ x_c^2 + (y_c-2)^2 = 2^2 + 2^2\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}x_c^2 - 4y_c + y_c^2 = 4 \\ x_c^2 - 4x_c + y_c^2 = 4\end{cases}$$

Subtraindo as equações, obtemos:

$4x_c - 4y_c = 0 \leftrightarrow x_c = y_c$

Substituindo y_c por x_c na segunda equação, obtemos:

$x_c^2 - 4x_c - 4 = 0 \leftrightarrow x_c = 1 + \sqrt{3}$

Resultado: C tem coordenadas $(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$

3. Calcula o ponto médio do segmento cujas extremidades são os pontos A (1,2) e B (4,4).

$$P(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}) \leftrightarrow P(\frac{1+4}{2}, \frac{2+4}{2}) \leftrightarrow P(\frac{5}{2}, 3)$$

4. Calcula a distância do ponto $(1,2)$ à recta $3x + 4y + 1 = 0$

$$d(P,r) = \frac{|3.1 + 4.2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|12|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

4.11. Exercícios propostos

1. Dados os pontos, A (4, 5), B (-3, 7), C (-1. -1), D (2, -5), representa no sistema de coordenadas ortogonais os vectores:

   a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{-BD}$ d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

2. Dados os vectores $\overrightarrow{AB} = (3,4)$ e $\vec{A} = (-2,3)$, encontre o vector $\vec{B}$ e representa o vector $\overrightarrow{AB}$ no SCO.

3. Dados os vectores $\overrightarrow{CF} = (-7{,}5)$ e $\vec{F} = (4{,}2)$, representa o vector $\overrightarrow{CF}$ no SCO.

4. Considera, os pontos A(-2, 1) , B(2, 3) e C(4, -1). Representa-os no mesmo sistema de coordenadas.

a) Determina: $|A|, |B|, |C|, |AB|, |BA|, |BC|$ e $|CA|$.

b) Os pontos são colineares? Justifica a tua resposta.

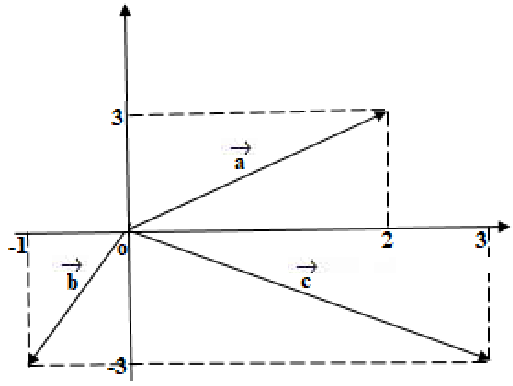
5. Considerando a figura ao lado, determina:

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $-\vec{b} + \vec{c}$

c) $2\vec{a} + \vec{b}$

d) $\vec{c} - \vec{b}$



6. Considerando a figura do exercício 5, determina:

a) O comprimento do vector b.

b) O comprimento do vector c

c) O vector unitário na direcção do vector a.

7. Considerando igualmente a figura do exercício 5, efectua:

a) $\vec{a}.\vec{b}$

b) $\vec{b}.\vec{c}$

c) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{c})$

8. Determina uma equação da recta que:

a) Passa pelo ponto (3, 5), com $a = 1/2$

b) Passo pelo ponto (3,0), com $a = 4/5$

9. Determina o valor, em graus, da inclinação da recta que, num referencial ortogonal, é definida pela equação reduzida:

a) $y = x - 2$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$ c) $y = -x + 7$ d) $y = -\sqrt{3}x - 4$

10. Determina o valor, em graus, da inclinação da cada uma das rectas seguintes, sabendo que, em um referencial ortonormado, são definidas pelas equações vectoriais.

a) $(x, y) = (-1{,}1) + k(2, -6), k \in R$

b) $(x, y) = (-3{,}1) + k(2, -2\sqrt{3}), k \in R$

11. Determina a equação reduzida da recta que, num referencial ortonormado, tem:

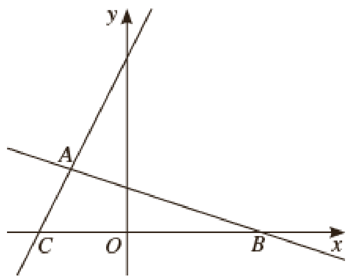
a) 60º de inclinação e passa no ponto de coordenadas (2;0).

b) 135º de inclinação e passa no ponto de coordenadas (3;1).

12. No referencial da figura estão representadas as rectas AB e AC.

Sabe-se que:

- B e C são pontos pertencentes ao eixo Ox;
- AB é definida por $x + 3y = 3$;
- AC é definida por $y = 2x + 4$.



a) Determina a amplitude, em graus, aproximada às décimas, do ângulo BAC.

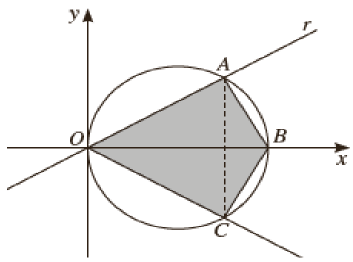
b) Calcula as coordenadas do ponto A.

c) Mostra que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ e determina as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$.

13. No referencial da figura estão representados uma circunferência, a recta r e o quadrilátero $[OABC]$.

Sabe-se que:

- A circunferência tem equação $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 3$;
- A inclinação da recta r é $\frac{\pi}{6}$rad;
- A é um ponto de intersecção da recta **r** com uma circunferência com o eixo Ox;
- C pertence à circunferência e tem a mesma abcissa de A.



Determina:

a) A equação reduzida da recta r.

b) As coordenadas do ponto A

c) A área do quadrilátero $[OABC]$.

d) A equação reduzida da recta AB.

e) A inclinação da recta AB.

f) O perímetro do quadrilátero$[OABC]$

Unidade V Equações e Inequações Exponenciais

5.1. Equação Exponencial - Definição

Chama-se equação exponencial a toda a equação que apresenta incógnita sob expoente.

Exemplos:

- $2^x = 4$ é exponencial, pois o x que é incógnita aparece no expoente;
- $3^{x+2} = 27$ é exponencial, pois o x que é incógnita aparece no expoente;
- $3^{x+1} + 3^{x+2} + 1 = 37$ é exponencial, pois o x que é incógnita aparece no expoente.

5.1.1. Resolução de Equações exponenciais

Para resolver equações exponenciais, prossegue-se da seguinte forma:

1. Encontrar potências da mesma base, em cada membro;
2. Igualar os expoentes dos dois membros entre si;
3. Determinar o valor da variável.

Exemplos:

- $2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$ Sol. $\{2\}$
- $3^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$ Sol. $\{-3\}$
- $\sqrt{3^x} = 9 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow x = 6$ Sol. $\{6\}$
- $3^{x+1} + 3^{x+2} + 1 = 37 \Leftrightarrow 3^x.3 + 3^x.3^2 + 1 = 37 \Leftrightarrow 3^x(3+9) = 37 - 1 \Leftrightarrow 3^x.12 = 36 \Leftrightarrow 3^x = \frac{36}{12} \Leftrightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$ Sol. $\{1\}$
- $4^x - 9.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 9.2^x + 8 = 0$, vamos fazer a substituição: $t = 2^x$ e determinemos o valor de t.

$t^2 - 9t + 8 = 0$ Resolvendo esta equação quadrática, teremos: $t_1 = 1$ e $t_2 = 8$ voltamos a igualdade $t = 2^x$ e substituímos os valores de t e teremos:

Para $t_1 = 1$ $2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$

Para $t_2 = 8 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$, logo a solução da equação exponencial dada é: $\{0; 3\}$.

5.2. Inequações Exponenciais

Seja $a^m > a^n$ uma inequação exponencial. Para resolver esta inequação, é preciso ter atenção no seguinte:

- Se $a > 1$ o sentido do sinal da desigualdade mantém-se, isto é: $a^m > a^n$, $\mathrm{m} > \mathrm{n}$;
- Se $0 < a < 1$ (com $a \in IR^+$) o sentido do sinal da desigualdade muda, isto é: $a^m > a^n$, $\mathrm{m} < \mathrm{n}$.

Exemplos:

1. Resolva as seguintes inequações:
   a) $2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Longrightarrow x > 2$; Sol. $x \in]2; +\infty[$
   b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Longrightarrow x < -2$ Sol. $]-\infty; -2[$

Exercícios Propostos

1. Resolve as seguintes equações exponenciais:
   a) $3^{2x} + 3^{x+1} = 18$
   b) $-5^{x-1} - 5^x + 5^{x+2} = 119$
   c) $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52$
   d) $\frac{25^x+125}{6} = 5^{x+1}$
   e) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = \frac{15}{2}$
   f) $2.2^x = \sqrt[6]{8}\,.\sqrt[4]{2}\,.\sqrt[6]{2}$
2. Dada a equação $\mathbf{2^{3x-2} \cdot 8^{x+1} = 4^{x-1}}$, podemos afirmar que sua solução é um número:
   A Natural.
   B Maior do que 1.
   C De módulo maior do que 1.
   D Par.
   E De módulo menor do que 1.
3. A soma das raízes da equação $\mathbf{2^{2x+1} - 2^{x+4} = 2^{x+2} - 32}$ é:
   A 2 B 3 C 4 D 6 E 7
4. Determina o conjunto solução do seguinte sistema de equações exponenciais:

$$\begin{cases} 4^x . 8^y = \dfrac{1}{4} \\ 9^x . 27^{2y} = 3 \end{cases}$$

5. Resolve as seguintes equações exponenciais:
   a) $2^{2x+2} - 2^{x+3} > 2^x - 2$
   b) $(3^x)^{x-1} \leq 729$

c) $\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{3}{9}\right)^{x-3}$

6. A solução da inequação $\mathbf{0{,}5^{(1-x)} > 1}$ é o conjunto:

A $\{x \in R \mid x > 1\}$ **B** $\{x \in R \mid x < 1\}$ **C** $\{x \in R \mid x > 0\}$ **D** $\{x \in R \mid x < 0\}$ **E** $x \in IR$

Unidade VI Equações e Inequações Logarítmicas

6.1. Equações logarítmicas

Equação logarítmica é aquela que apresenta incógnita na base do logaritmo, no logaritmando ou no logaritmo. Lembra-te que um **logaritmo** pela definição possui a seguinte forma: $\log_a b = x \implies b = a^x$, $\boldsymbol{b}$ é o logaritmando; $\boldsymbol{a}$ é a base do logaritmo e $\boldsymbol{x}$ é o logaritmo.

Exemplos:

- $\log_2 x = \log_2 8$
- $\log_5 x = 1$
- $\log_3(x+1) = \log_3 2x$

Para resolver equações logarítmicas, devemos ter em consideração as propriedades operatórias dos logaritmos, pois elas podem facilitar o desenvolvimento dos cálculos.

Exemplos:

- $\log_2 x = \log_2 8 \implies x = 8$ Sol. $\{8\}$;
- $\log_5 x = 1 \iff \log_5 x = \log_5 5 \implies x = 5$ Sol. $\{5\}$
- $\log_3(x+1) = \log_3 2x \implies x+1 = 2x \iff x - 2x = -1 \iff -x = -1 \iff x = 1.$

  Condição: $x + 1 > 0 \wedge 2x > 0 \iff x > -1 \wedge x > 0$ logo o valor de $\boldsymbol{x}$ encontrado satisfaz as duas condições, então: Sol. $\{1\}$
- $\log_2(x+1) = 3 \iff x+1 = 2^3 \iff x+1 = 8 \iff x = 7$

  Condição: $x + 1 > 0 \iff x > -1$, logo o valor de $\boldsymbol{x}$ encontrado satisfaz as duas condições, então: Sol. $\{7\}$

- $\log_3(x-1) + \log_3(2x+1) - \log_3(x-3) = 3$

  Condições: $x - 1 > 0 \wedge 2x + 1 > 0 \wedge x - 3 > 0 \iff x > 1 \wedge x > -\frac{1}{2} \wedge x > 3$

  $\log_3(x-1) + \log_3(2x+1) - \log_3(x-3) = 3 \iff \log_3\left[\frac{(x+1).(2x+1)}{x-3}\right] = 3$

  $$\frac{(x+1).(2x+1)}{x-3} = 27 \iff (x+1)(2x+1) = 27(x-3)$$

  $\iff 2x^2 - x - 1 - 27x + 81 = 0 \iff x^2 - 14x + 40 = 0$ onde $x_1 = 4$ e $x_2 = 10$ como os valores de x satisfazem as condições, então: Sol. $\{4; 10\}$.

6.1. Inequações logarítmicas

Inequação logarítmica é aquela que apresenta incógnita na base do logaritmo, no logaritmando ou no logaritmo.

Exemplos:

- $\log_2 x > \log_2 8$
- $\log_5 x < \log_5 5$
- $\log_3(x+1) \geq \log_3 2x$

6.1.1. Resolução de Inequações logarítmicas

Seja $\log_a m > \log_a n$ uma inequação logarítmica. Para resolver esta inequação, é preciso ter em conta o seguinte:

- Se $a > 1$ o sentido do sinal da desigualdade mantém-se, isto é:

  $$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{m} > \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{n}, \ \mathbf{m} > \mathbf{n};$$

- Se $0 < a < 1$ (com $a \in IR^+$) o sentido do sinal da desigualdade muda, isto é:

  $$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{m} > \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{n}, \ \mathbf{m} < \mathbf{n}.$$

Exemplos:

- $\log_2 x > \log_2 8 \Rightarrow x > 8$. Sol. $x \in]8; +\infty[$
- $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 4 \Rightarrow x < 4$. Sol. $]-\infty; 4[$
- $\log_3 x > {log_9}^2 x$, reduzindo para mesma base, teremos: $\log_3 x > \frac{1}{2} {log_3}^2 x$, Seja $t = \log_3 x$ e substituir, teremos: $t > \frac{1}{2} t^2 \Rightarrow 2t - t^2 > 0$ Resolvendo esta inequação quadrática, teremos como solução: $t \in]0; 2[$. Sendo assim, $\log_3 x > 0 \wedge \log_3 x < 2$ o que nos dá como solução $x \in]1; 9[$.

Exercícios Propostos

1. Resolve as seguintes equações logarítmicas:
   a) $\log_2(3x+10) - \log_2 x = \log_2 5$
   b) $\log_{x+3}(5x-1) = 1$
   c) $\log_2(12 - 2^x) = 2x$
   d) $-1 = \log_5\left(\frac{2x}{x+1}\right)$
   e) $\log_{3\sqrt{3}} x = \frac{1}{3}$
   f) $\log_{2x+1}(10x-3) = 1$
   g) $\log_{10}(4x-2) = \log_{10} 2 - \log_{10}(2x-1)$

2. A solução da equação $\log_x(x+6) = 2$ na variável real x é :

A $\{-2;\ -3\}$ B $\{2;\ -3\}$ C$\{-2;\ 3\}$ D $\{-2;\ 1\}$ E $\{-1;\ 3\}$

3. Resolve as seguintes inequações logarítmicas:
   a) $\log_{10}(x^2+2) > \log_{10}(2x-1)$
   b) $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) - \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$
   c) $\log_2(2x+5) - \log_2(3x-1) > 1$
   d) $\log_2(x-3) + \log_2(x+2) < 1$

Unidade VII Trigonometria

Nota histórica

A **Trigonometria** é a parte da Matemática encarregada de estudar as relações ocorridas entre os lados e os ângulos dos triângulos.

Ela é usada actualmente em diferentes áreas de estudo, desde teoria musical à navegação de satélite. Mas também pode ser empregada, por exemplo, na química, biologia, geografia e até na medicina.

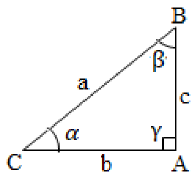
Seu emprego vem da época da Babilónia, embora os gregos sejam mais famosos no seu emprego. O Pai da Trigonometria é o grego Hiparco de Niceia, posto que a introduziu nos estudos científicos.

Observa o triângulo $[ABC]$.

<table>
<tr><td>Um dos seus ângulos internos é recto (mede 90º), por isso chama-se triângulo rectângulo.

Catetos: lados AB e BC

Hipotenusa: lado AC (oposto ao ângulo recto).

α, β e γ são os ângulos internos do triângulo.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Soma dos ângulos internos de um triângulo: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

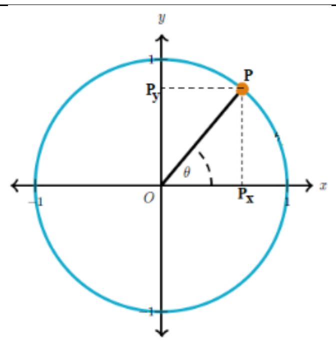
Ângulos complementares são aqueles cuja soma é igual a 90º: $\alpha + \beta = 90°$

Ângulos suplementares são aqueles cuja soma é igual a 180º.</td></tr>
<tr><td>7.1. Círculo trigonométrico

A representação gráfica ao lado chama-se círculo trigonométrico.

O ponto O é o centro da circunferência.

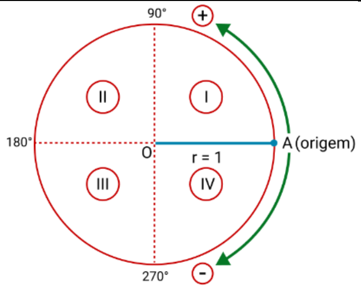
$\overline{OP}$ é o raio da circunferência e é igual a 1;

P_x e P_y são as projecções do ponto P nos eixos</td><td>
</td></tr>
</table>

coordenados.

O círculo trigonométrico está dividido em 4 partes iguais. Cada parte chama-se quadrante.

Por convecção o ponto A(1,0) é a origem da orientação, o sentido positivo é o sentido anti-horário e negativo no sentido horário.



7.2. Razões trigonométricas

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{P_y}{\overline{OP}} = \frac{P_y}{1} = P_y$$

$$\boxed{\text{sen}\theta = P_y}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{P_x}{\overline{OP}} = \frac{P_x}{1} = P_x$$

$$\boxed{\text{sen}\theta = P_x}$$

$$\text{tag}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{P_y}{P_x}$$

$$\boxed{\text{tag}\theta = \frac{P_y}{P_x}}$$

$$\text{cotg}\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$\boxed{\text{cotg}\theta = \frac{P_x}{P_y}}$$

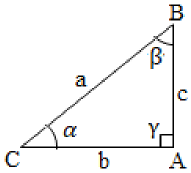
7.3. Razões trigonométricas de ângulos especiais: $30°, 45°$ e $60°$

Aplicando as definições das razões trigonométricas já conhecidas, obtemos os valores das razões trigonométricas correspondentes aos ângulos: $30°, 45°$ e $60°$.

α	$30°$	$45°$	$60°$
$sen\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$cotg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

7.4. Relação entre as razões trigonométricas

$$\alpha + \beta = 90° \leftrightarrow \beta = 90° - \alpha$$



$\text{sen}\alpha = \frac{c}{a}$ $\quad$ $\text{sen}\beta = \frac{b}{a}$ $\quad$ $cos\alpha = sen\beta \leftrightarrow cos\alpha = sen(90° - \alpha)$

$cos\alpha = \frac{b}{a}$ $\quad$ $cos\beta = \frac{c}{a}$ $\quad$ $sen\alpha = cos\beta \leftrightarrow sen\alpha = cos(90° - \alpha)$

$tag\alpha = \frac{c}{a}$ $\quad$ $tag\beta = \frac{b}{c}$ $\quad$ $cotg\alpha = tag\beta \leftrightarrow cotg\alpha = tag(90° - \alpha)$

$cotg\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad$ $cotg\beta = \frac{c}{a}$ $\quad$ $tag\alpha = cotg\beta \leftrightarrow tag\alpha = cotg(90° - \alpha)$

7.5. Teorema de Pitágoras

$\boxed{\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}}$ Se dividirmos ambos os membros por a^2, teremos: $\frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{c^2}}{\boldsymbol{a^2}} = \boldsymbol{1} \leftrightarrow$ $(\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\alpha)^2 = 1 \leftrightarrow$ $\boxed{(\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\alpha)^2 = 1}$ **rmula fundamental da trigonometria.**

Se dividirmos ambos os membros por $(\cos\alpha)^2$, teremos $\frac{(\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} + \frac{(\text{sen}\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \frac{1}{(\cos\alpha)^2} \leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} \leftrightarrow$

portanto $\boxed{\text{tg}\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$ maneira podemos obter $\boxed{\text{cotg}\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}}$

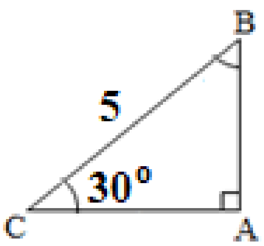
Outras relações fundamentais da trigonometria:

$\boxed{cotg\alpha . tg\alpha = 1}$ $\quad$ $\boxed{1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}}$ $\quad$ $\boxed{tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}}$

Exercícios resolvidos

1. Considerando o triângulo ao lado, determina:

a) O lado CA b) O lado AB c) $tg30°$ d) $cotg30°$



$$a)\ sen30 = \frac{AB}{5} \leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{5} \leftrightarrow AB = \frac{5}{2}$$

$$cos30 = \frac{CA}{5} \leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CA}{5} \leftrightarrow CA = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30 = \frac{sen30}{cos30} = \frac{5}{2} \div \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$cotg30 = \frac{cose30}{sen30} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \div \frac{5}{2} = \sqrt{3}$$

1. Sabendo que $sen\alpha = \frac{3}{5}$, determina o valor de $cos\alpha$, $tg\alpha$ e $cotg\alpha$.

$$a) sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \leftrightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \leftrightarrow cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$b) tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

$b)cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$

7.6. Sinal das razões trigonométricas

α	I	II	III	IV
senα	+	+	-	-
cosα	+	-	-	+
tagα	+	-	+	-
cotgα	+	-	+	-

7.8. Redução ao primeiro quadrante

Reduzir um ângulo do IIQ, IIIQ ou IVQ ao IQ é ter um ângulo correspondente no IQ, que tenha o mesmo valor ao arco dado.

A tabela abaixo resume a redução do II, III e IV quadrantes ao I quadrante.

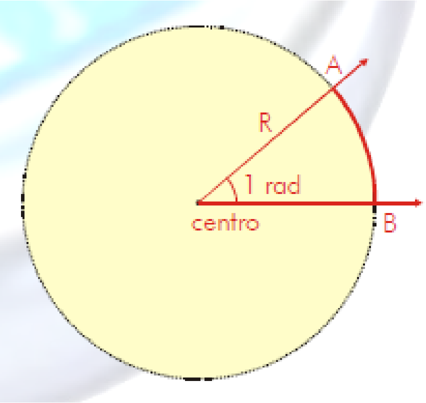
	Reduções ao Primeiro Quadrante		
	$\beta = \pi - \alpha$	$\beta = \pi + \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\text{sen}(\beta)$	$\cos(\alpha)$	$-\text{sen}(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
$\cos(\beta)$	$-\text{sen}(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$	$\text{sen}(\alpha)$
$\text{tg}(\beta)$	$-\text{cotg}(\alpha)$	$\text{tg}(\alpha)$	$-\text{cotg}(\alpha)$
$\text{cotg}(\beta)$	$-\text{tg}(\alpha)$	$\text{cotg}(\alpha)$	$-\text{tg}(\alpha)$

7.9. Noção de radiano

Radiano é a medida do ângulo central, de um ângulo cujo comprimento é igual ao raio do círculo. Abreviamos 1 radiano para 1rad.

Relação entre sistema sexagesimal e circular

$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{rad}}$ Ou $\boxed{180^\circ = \pi\text{rad}}$



Ângulos côngruos

Os ângulos no círculo trigonométrico possuem a mesma origem. Dois ângulos são côngruos quando a diferença entre suas medidas é de $2k\pi (com\ k \in Z)$.

Exemplo:

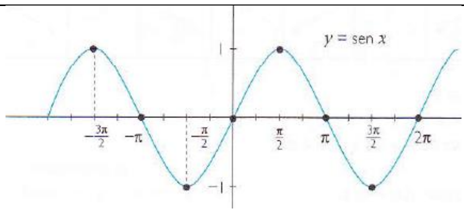
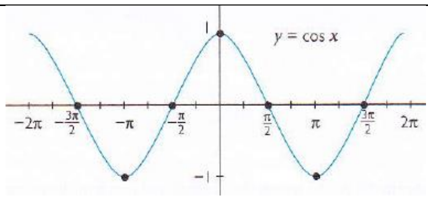
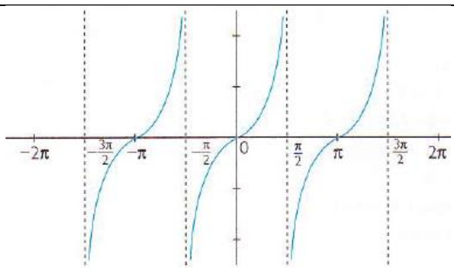
$-10°\ e\ 710°$ são côngruos ao arco 350º pois -10º =350º -1.360º e 710º =350º +1.360.

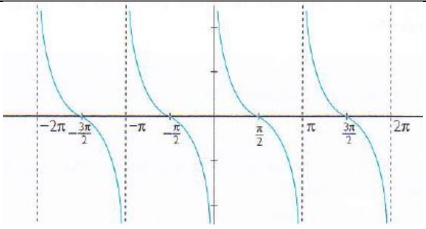
Noção de período

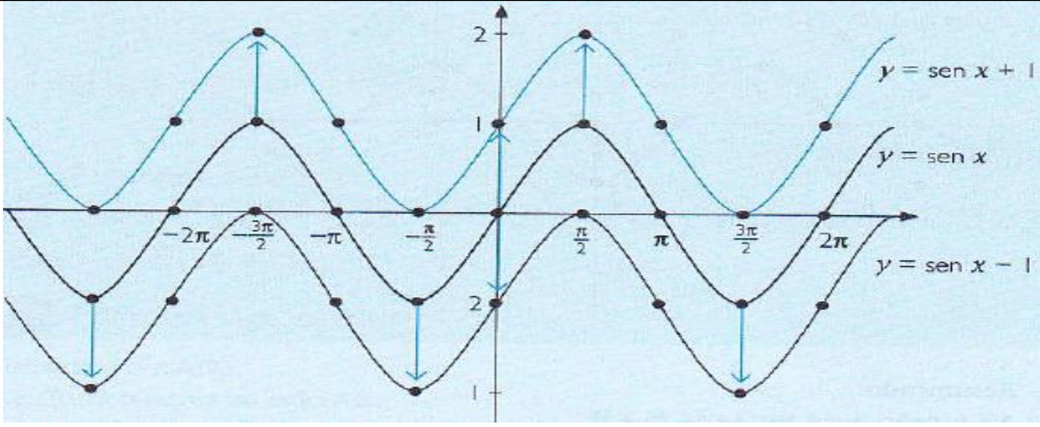
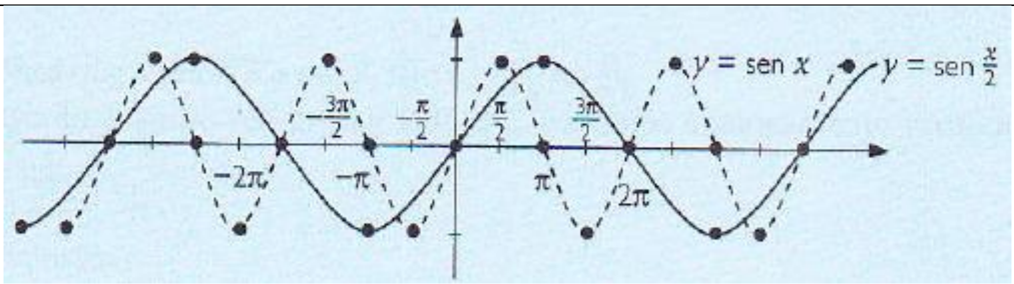
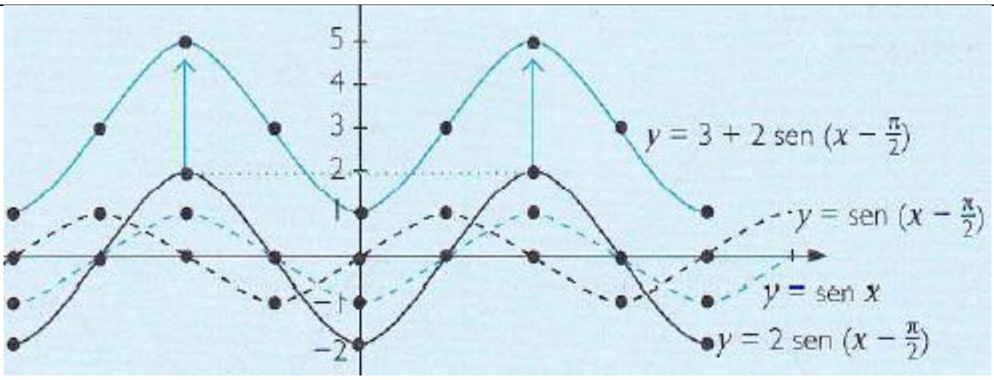
Se $\boxed{\boldsymbol{f(x+p)=f(x)}}$ para todo $x \in D_f$ então a função $\boldsymbol{f}$ **é periodica.**

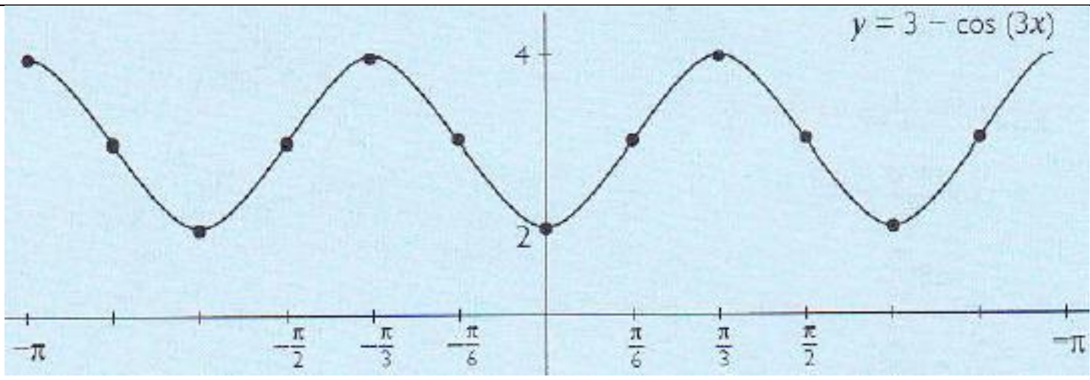
As funções trigonométricas são periódicas.

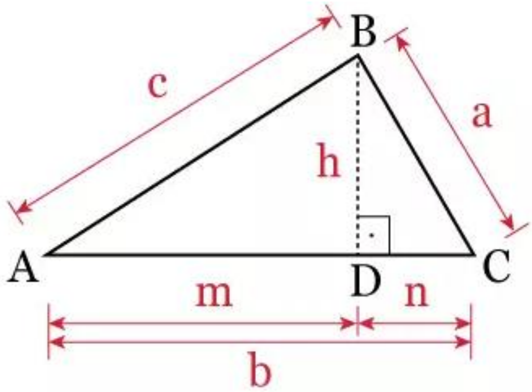
7.10. Representação gráfica de funções trigonométricas

Função	***Gráfico***	***Estudo da função***
$f(x) = senx$		**Zeros**: $x = k\pi; k \in z$ **Máximos:** $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in z$ **Mínimos:** $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k; k \in z$ **Domínio:** $x \in R$ **Contradomínio**: $[-1,1]$
$f(x) = cosx$		**Zeros**: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in z$ **Máximos:** $x = 2\pi k; k \in z$ **Mínimos:** $x = \pi + 2\pi k; k \in z$ **Domínio:** $x \in R$ **Contradomínio**: $[-1,1]$
$f(x) = tgx$		**Zeros**: $x = k\pi; k \in z$ **Domínio:** $x \in R \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in z\right\}$ **Contradomínio**: $f(x) \in R$

$f(x) = cotgx$		**Zeros**: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in z$ **Domínio:** $x \in R\backslash\{k\pi; k \in z\}$ **Contradomínio**: $f(x) \in R$

	Funções do tipo $f(x) = Asen(ax + b) + B$ e $f(x) = Acos(ax + b) + B$
	
	
	

7.11. Soma e diferença de ângulos	**Ângulo duplo**
$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha.\cos\beta + sen\beta.\cos\alpha$ $sen(\alpha-\beta) = sen\alpha.\cos\beta - sen\beta.\cos\alpha$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - sen\alpha.sen\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + sen\alpha.sen\beta$ $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta}$ $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha.tg\beta}$	$sen2\alpha = 2sen\alpha.\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$ $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$
7.12. Teorema dos senos $\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{sen}\hat{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{senB}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{senC}}}$ **7.13. Teorema dos cossenos** $\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos}\hat{A}}$	

7.14. Exercícios resolvidos

1. Resolve as seguintes equações trigonométricas:

a)$2sen2x = -1$ b) $2sen^2x = senx$ c) $\cos x - senx = 0$ d) $\cos^2x - 4\cos x + 3 = 0$

a) $2sen2x = -1 \leftrightarrow sen2x = -\frac{1}{2}$

$sen2x = sen\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \leftrightarrow sen2x = sen\frac{7\pi}{6}$

$2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \ v \ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{7\pi}{12} + \pi k \ v \ x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$

b) $2sen^2x = senx \leftrightarrow 2sen^2x - senx = 0$

$senx(2senx - 1) = 0$

$senx = 0 \ v \ 2senx - 1 = 0$

$senx = sen0 \ \ v \ senx = \frac{1}{2}$

$x = \pi k \ \ v \ \ senx = sen\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi K \ v \ \ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi K, k \in Z$

c) $cosx - senx = 0 \leftrightarrow cos^2x = sen^2x$

$cos^2x = 1 - cos^2x \leftrightarrow cos^2x + cos^2x = 1$

$2cos^2x = 1 \leftrightarrow cos^2x = \frac{1}{2} \leftrightarrow cosx = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cosx = cos\frac{\pi}{4} \leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

d) $cos^2x - 4cosx + 3 = 0$

Seja $cosx = t$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0$

$t = 1 \ v \ \ t = 3 \ \leftrightarrow \ \begin{cases} cosx = 3 \\ cosx = 1 \end{cases} \leftrightarrow$

$\begin{cases} -- \\ cosx = cos0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -- \\ x = 2\pi k, k \in z \end{cases}$

2. Dois lados de um triângulo medem 20 cm e 12 cm e formam entre si um ângulo de 120º. Calcula a medida do terceiro lado.

$b = 20cm$

$c = 12cm$

$cosx = cos120º = -0{,}5$

$a^2 = 20^2 + 12^2 - 2.20.12.(-0{,}5)$

$a^2 = 400 + 144 + 240$

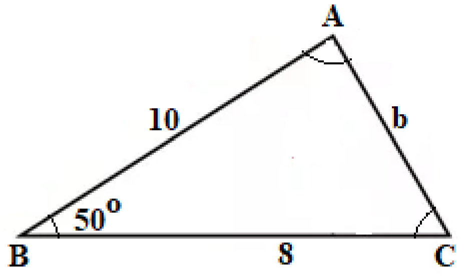
$a^2 = 784$

$a = \sqrt{784}$

$a = 28cm$

Portanto, o terceiro lado mede 28 cm.

3. Observa o triângulo $[ABC]$.



Determina:

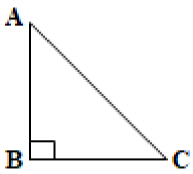
a) A medida do lado AC.

b) O ângulo com o vértice em A.

$b^2 = 8^2 + 10^2 - 2.8.10.cos50°$ $b^2 = 164 - 160.cos50°$ $b^2 =$ 164-160.0,64279 $b^2 \approx 7{,}82$	$8^2 = 10^2 + 7{,}82^2 - 2.10.7{,}82.cos\hat{A}$ $64 = 161{,}1524 - 156{,}4cos\hat{A}$ $cos\hat{A} = 0{,}62$ $\hat{A} = 52°$

7.14. Exercícios propostos

1. Observa a figura.



a) Classifica o triângulo $[ABC]$ quanto aos ângulos.

b) Qual é o nome de cada lado do triângulo $[ABC]$?

c) Qual é o lado maior do triângulo e como se chama?

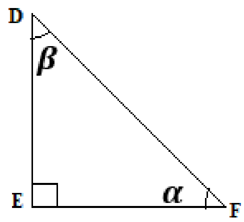
d) Quantos ângulos agudos tem o triângulo $[ABC]$?

2. Considera o triângulo ao lado.

a) Qual é o cateto oposto para o ângulo α?

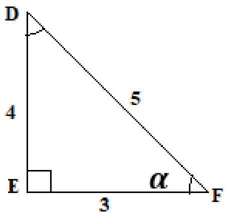
b) O cateto $\overline{DE}$ é adjacente para que ângulo agudo?

c) Para o ângulo α, qual é o lado que represeta a hipoteusa? E para o ângulo β.

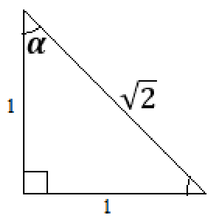


3. Para cada triângulo, calcula $sen\alpha, cos\alpha, tg\alpha$ e $cotg\alpha$.

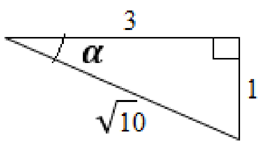
a)



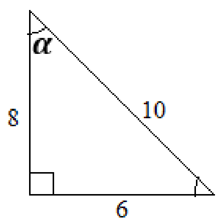
b)



c)

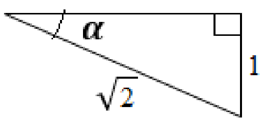


d)

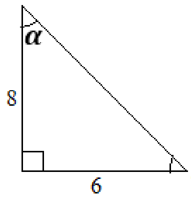


4. Para cada um dos seguintes triângulos, calcula a medida do ângulo α.

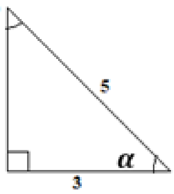
a)



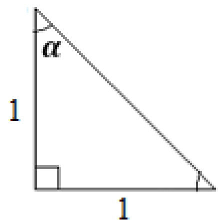
b)



c)



d)

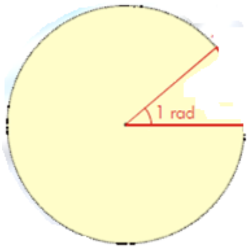


5. Sabendo que $senx = 0{,}6$, calcula $cosx$, tgx e $cotgx$.

6. As medidas dos lados de um triângulo são: $x, x+1\ e\ x+2$. Para qualquer número real x maior que 1, determina o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo.

7. Dois lados de um triângulo medem 4 m e 5 m e formam um ângulo de 60º. Qual é a medida do terceiro lado desse triângulo?

8. Num jogo electrónico, o monstro tem a forma de um sector circular de raio 1 cm, como mostra a figura.



A parte que falta no círculo é a boca do monstro, e o ângulo de abertura mede 1 radiano. Qual é o perímetro do monstro em cm?

9. Num triângulo rectângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos é 2. Sabendo que a hipotenusa desse triângulo mede 5, qual é o valor do seno desse ângulo?

10. Dada a função $f(x) = 1 - 2senx$
    a) Determina o contradomínio da função.
    b) Calcula a ordenada na origem.
    c) Esboça o gráfico de f.

11. Determina o contradomínio das funções:

    a) $f(x) = 3 + sen^2x$ b) $f(x) = 1 - sen2x$

12. Esboça os gráficos das seguintes funções:

a) $y = 1 - sen(x + \frac{\pi}{3})$

b) $y = 1 + cos(2x - \pi)$

c) $y = -3 + cosx$

d) $y = -2 + sen(x - \frac{\pi}{3})$

13. Calcula o valor de cada expressão:

a) $sen\,\pi + \cos 3\pi + 2.tg8\pi + \cos 5\pi$

b) $\frac{\cos(1080°) - 2sen(1530°)}{sen(-270°) + tg0°}$

c) $2.sen630° - 3cos180° + 5tg720° - tg(-180°)$

14. Resolve as seguintes equações trigonométrica no intervalo $x \in [0; 2\pi[$:

a) $sen\ x = 1$

b) $cosx = 1$

c) $senx = 0$

d) $cos\ x = 0$

e) $tgx = 0$

f) $cosx = -1$

15. Determina os valores reais *m* de modo que tenham sentido as expressões:

a) $9.cos\alpha = m^2$

b) $3sen\ x = m^2 - 1$

c) $tg \propto = \frac{1-2m}{m}$ com $\propto \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

16. Resolve as seguintes equações trigonométrica:

a)	$senx = cosx$	b)	$cosx + sen^2x = \frac{1}{2}$	c)	$cos^2x - cosx = 0$ no intervalo $[0; 2\pi]$
d)	$tg^2x = \sqrt{3}.tgx$	e)	$\frac{sen2x}{tgx} = \frac{1}{2}$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$		

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Unidade I: Teoria de conjuntos

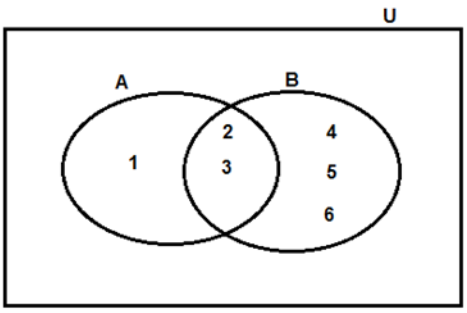
1. a) V b) V c) F d) F e) V f) V g) V h) V

2.a)

3. a) $F = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ b) $A = \{3,5,7,9\}$ c) $J = \{4\}$ $d)\ H = \{4,6,8,10,12, \dots.\}$

e) $I = \{2,3,4,5,6,7,8,\}$ f) $M = \{\ \ \}$

4.



5. a)$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$ b) $A \cap B = \{2,3,\}$ c) A-B + $\{1\}$ d) = $\{4,5,6\}$

6. a) $3 \in A$ $b)\ 7 \notin C$ $c)\ A \not\subset B$ $d)\ \not\subset$ e) $\supset$ f) $\subset$

7. a) $A \cup B = \{1,4,5,6,8,9\}$ b) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ c) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

8. a) $A \cup B = \{0,1,2,3,5\}$ b) $A \cup C = \{0,1,2,3,4,6,8\}$ c) $A \cup D = \{0,1,2,3,5,7,9\}$

d) $B \cup C = \{0,2,3,4,5,6,8\}$ e) $B \cup D = \{0,2,3,5,7,9\}$ f) $C \cup D = \{2,4,5,6,7,8,9\}$

g) $(A \cup B) \cup C = \{0,1,2,3,4,5,6,8\}$ $h)$ $(A \cup C) \cup D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

i) $(B \cup C) \cup D = \{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

9. a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ b) $A = \{3,4,\}$ c) $A = \{1,2,4\}$

10. a) $A \cap B = \{3,4\}$ b) $\overline{A \cap B} = \{1,2,5,6,7,8,9\}$ c) $A \cap U = \{1,2,3,4\}$ d) $\overline{A \cup B} = \{7,8,9\}$

e) $\bar{B} = \{1,2,7,8,9\}$ f) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{7,8,9\}$ g) $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1,2,5,6,7,8,9\}$ h) $\bar{A} = \{5,6,7,8,9\}$

11. a) $\overline{A} = \{5,6,7,8,9\}$ b) $\overline{B} = \{5,6,7,8,9\}$ c) $\overline{A \cap C} = \{1,2,5,6,7,8,9\}$ d) $\overline{A \cup B} = \{5,7,9\}$

e) $\bar{\bar{A}} = \{1,2,3,4\}$ f) $\overline{B - C} = \{1,2,3,4,5,9\}$

12. a) $A \cup B = \{a,b,d,e\}$ b) $B \cap A = \{b,d\}$ c) $\bar{B} = \{a,c\}$ d) $B - A\,\{e\}$ e) $\bar{A} \cap B = \{e\}$

f) $A \cup \bar{B} = \{a,b,c,d\}$ g) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{c\}$ h) $\bar{B} - \bar{A} = \{a\}$

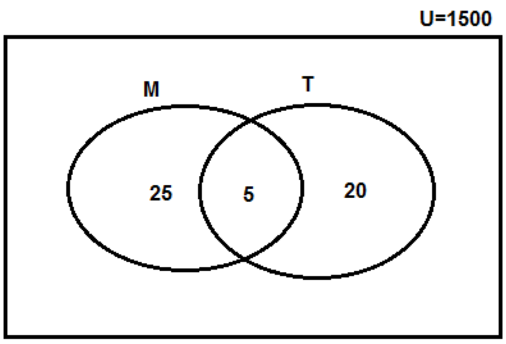
13. a) U$\cap A = A$ $b)\ \bar{\emptyset} = U$ c) $\bar{A} \cap A = \emptyset$ $d)\ U \cup A = U$ $e) A \cap A = A$ $f)\ A \cup A = A$ $g) \emptyset \cup A = A$

h) $\bar{U} = \emptyset$ $i)\ \bar{A} \cup A = U$

14. a) $\bar{A} =]-2,2] \cup [3,4\,]$ $b)\ \bar{B} =]-2,-1[\cup [3,4]$ $c) A \cup B = [-1,4[$ $d) A \cap B =]2,3[$

$e)\ \overline{A \cap B} =]-2,2] \cup [3,4\,]$ $f)\ \bar{A} \cup \bar{B} =]-2,2] \cup [3,4\,]$ $g) \bar{\bar{A}} =]2,4]$

15. a)



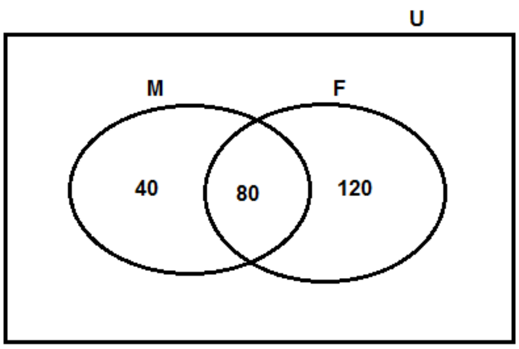
b) 25+20=45 c) 25+5+20 = 50

16. a) 250-(100+55) =95 b)25 c) 390 d) 100 e) 1500 - 775=725

17. a) 20 b) 24 c) 22 d) 32

18. a) 140 b) 230 c) 480

19.



b) 240

Unidade Temática II: Lógica Matemática

1. a) Não é verdade que este livro é meu.
   b) Não é verdade que aquela pasta é tua.
   c) Este livro é meu ou aquela pasta é tua.
   d) Não é verdade que este livro e meu e aquela pasta é tua.
   e) Não é verdade que este livro e meu ou aquela pasta é tua.

2. A $a \dot{\vee} b$
   B $\sim a \wedge \sim c$
   C b $b^{\cdot} \dot{\vee} \sim c$

3. a) Não é verdade que 2 é um número par.
   b) 2 é um número par e é divisor de 4.
   c) Não é verdade que 2 é divisor de 4 e é um número par.
   d) Não é verdade que 2 é um número primo e é divisor de 4.
   e) 2 é um número par ou é um número primo.
   f) Ou 2 é um número par ou é um número primo.
   g) Não e verdade que 2 é um número par e é um número primo.

4. a) V b)F c)V d) F e) V f) V g) F h) V i) F j)V
5. a) q $\Rightarrow r$ b) p $\Rightarrow \sim r$ c) $\sim r \Rightarrow \sim q$ d) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow q$
6. a) F b) V c) F
7. a) F b) V c) F
8. a) V b) V c) V
9. a) Paulo estuda Matemática se e somente se Paulo quer ser cientista.
   b) Paulo estuda Matemática se e somente se não quer ser jornalista.
   c) Paulo estuda Matemática e quer ser cientista se e somente se não quer ser jornalista.
10. a) F b) V c) V

11. a) V b) F c) F

12 a) V b) V c) V

13. a) a) V b) F c) V d) f e) V

Unidade Temática III: ÁLGEBRA

1. a) Racional Inteira b) Racional Inteira c) Racional Fraccionária d) Racional Inteira e) Racional Inteira

f) Irracional g) Irracional h) Irracional fraccionária i) Irracional fraccionaria j) Irracional fraccionaria

l) Racional inteira m) Racional Fraccionaria n) Irracional Fraccionaria.

2.a) $x; y \in \mathcal{R}\backslash\{x = y\}$ $-\frac{4}{7}$ b) $a \neq -b$ 0

3. a) $x \in [3, +\infty[$ $b)\ x \in \mathcal{R}\backslash\{-2\}$ $c)\ x \in]-3,2]$

d) $x \in \mathcal{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ $e)\ x \in \mathcal{R}$ $f)\ x \in \mathcal{R}$ $g)\ x \in \mathcal{R}$ $h)\ x \in \mathcal{R}\backslash\left]-\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$ $i)\ x \in \mathcal{R}\backslash\{-3,4\}$

4. a) Não são idênticos porque não têm o mesmo domínio de equivalência.

b) São idênticas pois têm o mesmo domínio de equivalência $D: x \in \mathcal{R}$.

c) Não São idênticas pois diferem no domínio de equivalência.

d) São idênticas pois têm o mesmo domínio de equivalência.

5.a São polinómios: a); b); g); h

6. a) $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$ b)) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ c)) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

7. $a)\ 8x^3 - x^2 - 3x + 5$ $b)\ x^5 + x^4.\sqrt{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 6$ $c) a\sqrt{a-b.}x^4 + (a+b)x^2 - 3bx + ab$

8.a $x^5 - 3x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x - 1$ $b)\ 5x + 8$ $c) x^5 - 4x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ $d)\ x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{15}{4}x^3 - 2x^2 - x + 2$

e) $\frac{5}{4}x^2 + 4x + 4$ $f)\ \frac{1}{2}x^7 2x^5 - x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

9. a) $Q(x) = x - 3\ e\ R(x) = -5x + 6\quad b)\ Q(x) = -x^2 - 4x - 9\ e\ R(x) = -13$

10. a) $Q(x) = 2x - 7\ e\ R(x) = 12$ b) $Q(x) = 3x^2 + 5x + 10\ e\ R(x) = 2$

c) $Q(x) = 8x^4 + x^3 + x^2 - 1\ e\ R(x) = 2$ d) $Q(x) = 2x^2 - 2x + 1\ e\ R(x) = \frac{9}{2}$

11. a) 1 é raiz b) 4 não é raiz c) -1 não é raiz d) -2 não é raiz e) -3 é raiz

12. a) $x^4 + 2x^2 - 3 = (x + \sqrt{2}).\left(x - \frac{1}{4}\right).(x - \sqrt{2})$ b) $x^4 + 2x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x - 1)(x + 1)$

13. a) $\{-1; 5\}$ b)) $\{1; 2; 3\}$ c) $\{-1; 1; 2\}$ d) $\{-3; -2; 3\}$ e) $\{-2\}$

14. a) não é divisível b) é divisível c) é divisível

15. a) $a = 1\ e\ b = 1$ b) $a = 1;\ c = -4$ e $d = -4$ c) $b = -5$ e $c = 2$

16. $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 2$

17. a) $m = -3\ e\ n = -4$ b) $m = -2\ e\ n = -3$ c) $m = 0\ e\ n = -3$

18. a) 961 b) 2401 c)11326 c)88804 e)484 f) 896 g) 1.44 h) 0.64

19 a) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ b) $8t^3 - 6t^2 + 12t - 1$

c)$(2 - t).(4 + 2t + t^2)$ d) $(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

20 a) $\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{x}\ Domínio\ de\ existência: x \in \mathcal{R}\backslash\{-1,0,1\}\ Domínio\ de\ equivalência:\ x \in \mathcal{R}\backslash\{0\}$

e) $Domínio\ de\ existência: x \in \mathcal{R}\backslash\{-1\}\qquad Dominio\ de\ equivalência:\ x \in \mathcal{R}.$

21. a) $2\sqrt{x}$ b) $\frac{2\sqrt[3]{xy^2}}{xy}$ c) $\frac{\sqrt[3]{x^2.\frac{1}{y}}}{y}$ d) $-\frac{6-9\sqrt{6}}{50}$ e) $2\sqrt{2}$ f) $\frac{\sqrt{x}.(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{x-2}$ g) $\frac{\sqrt{(x-1)(2\sqrt{x}+1)}}{4x-1}$

22. a) -4 não é solução de $x^2 - 3x = 0$;

b) 3 é solução de $(x^2 - 4): (x - 2) = 2x - 1$;

c) 4 não é solução de $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 2} = 4$;

d) 3 é solução de $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x-1.}$

23. $p = 2$

24. a) São equivalentes

b) São equivalentes

c) São equivalentes

d) São equivalentes

e) Não são equivalentes

f) Não são equivalentes

25. a) 0 b) $-\sqrt{6}\ e\ \sqrt{6}$ c) -3 e 3 d) $-\frac{b}{2a}\ e\ \frac{b}{2a}$ e) 0 e -16 f) 0 e $\frac{7}{5}$

26. a) x=2 b) x-3 c) $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{25}}$ d) $x = -\frac{2}{3}$ e) 0 e $-\frac{3}{4}$ f) 0 e 5 g) 0; $\pm\sqrt{3}$ h) 0 e 4 i) $-\sqrt{2}$; 0 ; $\sqrt{2}$ j) $-1;\ -\frac{1}{3}\ e\ \frac{1}{3}$

27. a) $x = 4$ $b)\ x = -6$ $c)\ x = 0$ $d)\ x =$ $d)\ x_1$=0 e $x_2 = 1$ $f)\ sem\ solução\ em\ \mathcal{R}$ $g)\ x = 2$ $h)\ x = \frac{23}{10}$

$i)\ x = -2$ $j)\ x_1$=2 e x_2=$\frac{9}{8}$

28. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ $c)\ \begin{cases} x = -\frac{13}{17} \\ y = -\frac{46}{17} \end{cases}$

29. $k = -\frac{1}{2}$

30. $m = \pm 2$

31. $a = 1\ e\ b = 9$

32. a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ b) Sem solução c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{5} \end{cases}$

Unidade Temática IV:

4. $a)\ |A| = \sqrt{5}$, $|B| = |\sqrt{13}|$, $|AB| = \sqrt{65}$

b) Os pontos não são colineares, pois não pertencem à mesma recta.

5. a) (1,0) b (4,0) c (3,3) d) (2,-4)

6.a)$\sqrt{10}$ b)$3\sqrt{2}$

7. a) -11 b) 6 c) 15

8. a)$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ b))$y = \frac{4}{5}x - \frac{12}{5}$

9. a) 45º b) 30º c) 135º d) 120º

10. a) 108,4º b) 120º

11. a) $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ b) $y = -x + 4$

12. a) 98,2º b) $A(-\frac{9}{7},\frac{10}{7})$ c) ($\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{AB}(\frac{30}{7}; -\frac{10}{7})$

13. a) ($y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$) b) $A(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ c) $A = 3\sqrt{3}u.a$ d) ($y = -\sqrt{3}x + 6$) e) (120º) f) $P = 6 + 2\sqrt{3}u.c.$

Unidade Temática V: Equações e Inequações Exponenciais

1. a) 1 b) 1 c) 5 d) $\{1; 2\}$ e) -1 f) $-\frac{1}{12}$
2. E
3. C
4. $\begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = 1 \end{cases}$
5. a) $x \in IR \backslash x < -2 \vee x > 1$ b) $x \in IR - 2 \leq x \leq 3$ c) $x \in IR\ x \leq -3 \vee x \geq 2$
6. A

Unidade Temática VI: Equações e Inequações logarítmicas

1 a) 5 b) 1 c) $\log_2 3$ d) $\frac{1}{9}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$ g) $\sqrt{3}$

2. C

3. a) $x \in IR\ x > \frac{1}{2}$ b) $x \in IR\ x > 5$ c) $x \in IR\ x > \frac{1}{3} \vee x < \frac{7}{4}$ d) $x \in IR\ x > 3 \vee x < 4$

Unidade Temática VII:

1. a) Triângulo rectângulo b) AB e BC são catetos c) O lado maior e o lado AC- Hipotenusa

d) Tem 2 ângulo agudos.

2. a) DE b) Adjacente ao β c) A hipotenusa é DF

3. a) $sin\alpha = \frac{4}{5}$; $cos\alpha = \frac{3}{5}$; $tg\alpha = \frac{4}{3}$; $cotg\ \alpha = \frac{3}{4}$

b) $sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg\alpha = 1$; $cotg\ \alpha = 1$

c) $sin\alpha = \frac{1}{3}$; $cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $tg\alpha = \frac{1}{3}$; $cotg\ \alpha = 3$

d) $sin\alpha = \frac{3}{5}$; $cos\alpha = \frac{4}{5}$; $tg\alpha = \frac{3}{4}$; $cotg\ \alpha = \frac{4}{3}$

4.$a)\ \alpha = 45^0$ $b)\ \alpha = 36{,}89^0$ c)) $\alpha = 53{,}13^0$ d)) $\alpha = 45^0$

5. $cosx = 0{,}8$; $tgx = 0{,}75$ $cotg\ x = 1{,}33$

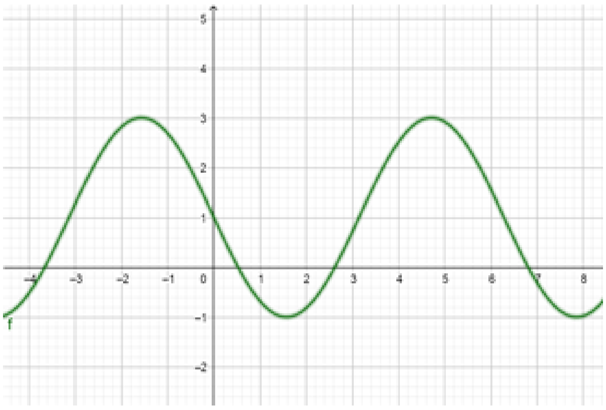
6. $cos\beta = \frac{x}{x+2}$

7. O terceiro lado mede 4.33 m

8. $2.\pi + 1$

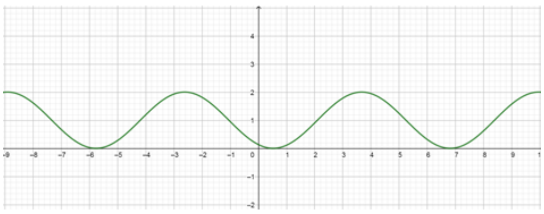
9. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

10 a) $D'f;\ [-1;3]$ b) $f(0) = 1$ c)

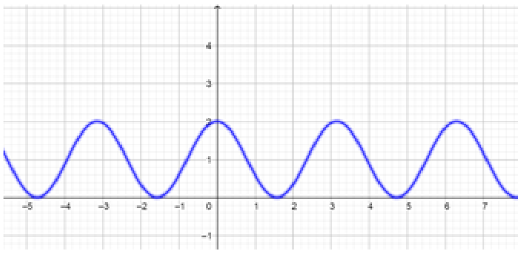


11. a) $D'f: y \in\ [3;4]$ b) $D'f: y \in\ [0;2]$

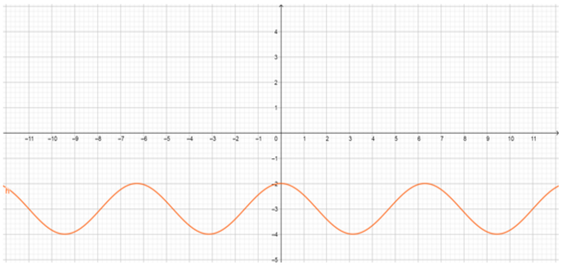
12. a)



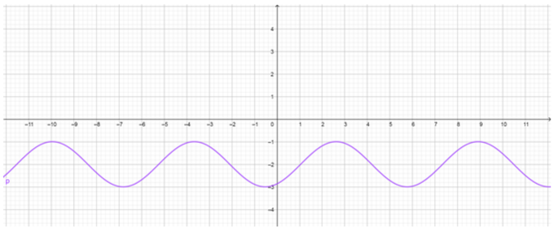
b)



c)



d)



13. a) -2 b) 1 c) 1

14. a) $x = \frac{\pi}{2}$ b) $x = 0$ c) $x = 0\ \vee x = \ \pi$ d) $x = \ \frac{\pi}{2} \vee x = \ \frac{3\pi}{2}$ e) $x = 0\ \vee x = \ \pi$ f) $x = \ \pi$

15. a) $m \in [-3;3]$ b) $m \in [-2;2]$ c) $m \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$

16. a) $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\ ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ b) $\left\{\frac{7\pi}{12} + k\pi\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{12} + k\pi\right\}$ c) $\left\{\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$

d) $\{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\ \right\}$ e) $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$

Referências Bibliográficas

Gomes, F. & Viegas, C. (2004). XEQMAT (Matemática -. 11° ano) vol. 2, Lisboa, Texto Editora.

Giovanni, J. R., Bonjorno, J.R., & Giovanni JR., J. R. (1994). Matemática Fundamental, 2º Grau, São Paulo, FTD.

Guerreiro L., Pereira, A., & Silva, M. C. (2010). *Matemática B 10º ano Caderno de Actividades*, Lisboa, Porto Editora.

Neves, M. A. F., & Silva, J. N. (2020). *Matemática 11.ª classe*, Edição/reimpressão, Plural Editores Moçambique.

Neves, M. A. F, & Brito, M. L. C. (1996). *Matemática 10.º ano de escolaridade*, 1º volume, Lisboa, Porto Editores.

Vuma, J. P., & Cherinda, M. (2009). *Pré-Universitário Matemática 11,* Longman.